

Technische Universität Dresden

**Anwendung des Lattice-Boltzmann-Verfahrens
zur Berechnung strömungsakustischer
Probleme**

Andreas Wilde

von der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der
Technischen Universität Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktoringenieurs
(Dr.-Ing.)

angenommene Dissertation

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie des Lattice-Boltzmann-Verfahrens	8
2.1	Die Boltzmanngleichung	8
2.2	Das Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell	10
2.3	Vom Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell zur Navier-Stokes-Gleichung	12
2.3.1	Chapman-Enskog-Entwicklung	12
2.4	Das Multiple-Relaxation-Time-Modell	16
3	Numerische Aspekte der Beschreibung von Schallwellen in einem Lattice-Boltzmann-Modell	20
3.1	Die Physik der Schallausbreitung	20
3.2	Beschreibung der Schallausbreitung durch Lattice-Boltzmann-Verfahren	22
3.3	Dispersion und Dissipation von Schallwellen im 2D-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell	24
3.4	Dispersion und Dissipation von Schallwellen im 3D-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell	26
3.5	Dispersion und Dissipation von Schallwellen in Multiple-Relaxation-Time-Modellen	35
4	Anwendungen	39
4.1	Vorderkantenlärm	39
4.1.1	Abschätzung des Vorderkantengeräusches mit einer akustischen Analogie	40
4.1.2	Beschreibung der Simulationen	46
4.1.3	Ergebnisse	48
4.2	Helmholtzresonator in einer überströmten Platte	53
4.2.1	Beschreibung des Experimentes	53
4.2.2	Ergebnisse	56
4.3	Halbzylinder mit Dreikantaufsatz	70
4.3.1	Beschreibung des Experimentes	70
4.3.2	Ergebnisse	71
5	Diskussion und Ausblick	78
5.1	Dispersion und Dissipation	78
5.2	Anwendung des Lattice-Boltzmann-Verfahren in strömungsakustischen Simulationen	80
5.3	Ausblick	82

Danksagung

Die vorliegende Arbeit benötigte eine lange Zeit zur Entstehung und Reifung. Ich bin folgenden Personen zu besonderem Dank verpflichtet, weil ohne deren Unterstützung diese Arbeit nicht entstanden wäre: Zuerst möchte ich meinem Betreuer Professor Költzsch für die langjährige, gute Zusammenarbeit und Unterstützung, die vielen Diskussionen und Anregungen danken. Die meisten Ergebnisse dieser Arbeit entstanden im Zuge der Arbeit am Projekt AKUSIM, das ich dank Professor Költzsch an meinem neuen Arbeitsplatz am Fraunhoferinstitut für Integrierte Schaltungen bearbeiten konnte. Desweiteren danke ich meinen Vorgesetzten und Kollegen am Fraunhoferinstitut für Integrierte Schaltungen dafür, dass sie mich bei der Bearbeitung dieses „exotischen“ Themas nach Kräften unterstützt haben. Ebenso bedanke ich mich bei meinen ehemaligen Kollegen am Institut für Technische Akustik der TU Dresden für die vielen hilfreichen Diskussionen und Anregungen. Außerdem möchte ich mich bei Professor Delfs, Professor Krafczyk und Professor Luo für die zahlreichen fachlichen Diskussionen, Hinweise und Erklärungen bedanken.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Lattice-Boltzmann-Verfahren hinsichtlich seiner Eignung für die numerische Lösung strömungsakustischer Probleme untersucht. Im ersten Teil der Arbeit wird die Beschreibung der Ausbreitung von Schallwellen durch die gängigsten Varianten des Lattice-Boltzmann-Verfahrens analysiert. Zu diesem Zweck werden die Phasengeschwindigkeit und die effektive Viskosität für Schallwellen in Lattice-Boltzmann-Modellen bestimmt.

Es werden zweidimensionale Verfahren mit neun Impulszuständen und dreidimensionale Verfahren mit neunzehn Impulszuständen untersucht, wobei jeweils Verfahren mit einfacher Relaxationszeit (Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell) bzw. multipler Relaxationszeit (Multiple-Relaxation-Time-Modell) betrachtet werden. Bei allen Verfahren ist der Fehler in der Phasengeschwindigkeit von Schallwellen weitgehend isotrop. Bei einer Auflösung von 10 bzw. 30 Gitterschrittweiten pro Wellenlänge ist die Abweichung der Phasengeschwindigkeit kleiner als 1 % bzw. 0,1 %.

Die Dissipation von Schallwellen wird bei den Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modellen prinzipiell falsch beschrieben, weil bei diesen Modellen die zweite Viskosität ν' (oft als Volumenviskosität bezeichnet) prinzipiell in einem festen Verhältnis zur ersten Viskosität ν (Scher-viskosität) steht: $\nu' = 2/3 \nu$. Darüber hinaus tritt nur eine geringe numerische Dissipation auf. Der Dissipationsfehler wirkt sich daher bei Simulationen von Schallwellen im hörbaren Frequenzbereich nicht aus, solange die betrachteten Volumina nicht zu groß werden. Bei den Multiple-Relaxation-Time-Modellen kann die zweite Viskosität durch die Wahl geeigneter Relaxationsparameter frei gewählt werden. Wählt man jedoch für die zweite Viskosität einen realistischen Wert, so müssen die freien Relaxationszeiten, um die Stabilität des Verfahrens zu erhalten, so gewählt werden, dass sie nur relativ wenig von den Werten der die Viskosität bestimmenden Relaxationsparameter abweichen. Der Gewinn an Stabilität beim Einsatz von Multiple-Relaxation-Time-Modellen geht dann zum Teil wieder verloren.

Alle untersuchten Verfahren bilden die Konvektionseffekte von Schallwellen in homogenen Grundströmungen korrekt ab. Es treten zwar zusätzliche numerische Fehler bei den Transportkonstanten auf, diese bleiben jedoch von ihrer Größenordnung her im Rahmen der auch im ruhenden Fluid auftretenden Fehler und sind damit in der praktischen Anwendung unkritisch.

Im zweiten Teil der Arbeit werden numerische Experimente beschrieben, die die Kopplung zwischen Schall- und Strömungsfeld zeigen. Die drei untersuchten Testfälle sind: Schallerzeugung durch den Übertritt eines einzelnen Wirbels über die Vorderkante einer halbumendlichen Platte, Schallerzeugung bei der Überströmung eines teilweise abgedeckten Hohlraumes und die instationäre Umströmung eines Halbzylinders mit angesetztem Heckdreikant.

Im ersten Testfall wird der direkt in zwei Dimensionen mit einem selbst erstellten Programm simulierte Schall mit theoretischen Vorhersagen anhand einer akustischen Analogie verglichen. Die beobachteten Amplituden des abgestrahlten Schalls stimmen für alle betrachteten Strömungsgeschwindigkeiten und Wirbelstärken quantitativ gut überein, woraus sich der Schluss ziehen lässt, dass die Kopplung zwischen Strömungs- und Schallfeld in den hier gezeigten Simulationen korrekt funktioniert.

Im Falle des überströmten Hohlraumes wird die Strömung sowohl zweidimensional mit einem selbst erstellten Programm als dreidimensional mit dem kommerziell erhältlichen Programm PowerFLOW simuliert. Die simulierten Druckschwankungen im Hohlraum werden mit

den Ergebnissen eines Windkanalexperimentes verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung zeigt.

Die instationäre Umströmung eines Halbzylinders mit Heckdreikant wird dreidimensional mit PowerFLOW simuliert. Der abgestrahlte Schall kann mit PowerFLOW wegen unzureichender Quantisierung der Dichte nicht erfasst werden, die Druckschwankungen auf der Oberfläche des Testkörpers zeigen jedoch eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen eines Experimentes im Windkanal.

Zusammenfassend wird aufgrund der vorgestellten Ergebnisse geschlossen, dass sich Lattice-Boltzmann-Verfahren gut zur numerischen Simulation strömungsakustischer Probleme eignen.

Bezeichnungen

Indices	
i, j, k, \dots	lateinische Buchstaben indizieren allgemein Summen oder Vektorkomponenten
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	griechische Buchstaben indizieren Koordinatenrichtungen im Ortsraum
Positionen, Geschwindigkeiten	
$\vec{x} = \{x, y, z\}$	Ortskoordinaten
$\vec{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$	Geschwindigkeit (meist Teilchengeschwindigkeit)
$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$	Geschwindigkeit (meist makroskopische Fluidgeschwindigkeit)
$x_\alpha, \alpha = x, y, z$	eine Komponente des Ortsvektors
t	Zeit
physikalische Größen und Konstanten	
$f(\vec{x}, \vec{u})$	Verteilungsfunktion
$f_i(\vec{x})$	diskretisierte Verteilungsfunktion
Ω	Kollisionsoperator
τ	Relaxationszeitkonstante
$\Delta \vec{x}_i$	Gittervektoren
Δx	Abstand zweier benachbarter Gitterknoten (Gitterweite)
Δt	Zeitschritt
$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	Gittergeschwindigkeit
\vec{c}_i	Gittergeschwindigkeitsvektoren, $\vec{c}_i = \Delta \vec{x}_i / \Delta t$
$d^3 \vec{x}$	Volumenelement im Ortsraum
$d^3 \vec{u}$	Volumenelement im Geschwindigkeitsraum
c_0	Schallgeschwindigkeit
c_{LBM}	Phasengeschwindigkeit der Schallwellen im Lattice-Boltzmann-Modell
k_B	Boltzmannkonstante
η	dynamische Viskosität
$\nu = \eta / \rho$	kinematische Viskosität

Kapitel 1

Einleitung

Die Strömungsakustik befasst sich mit der Entstehung von Schall in instationären Strömungen und mit der Ausbreitung von Schall in inhomogenen und möglicherweise auch instationären Strömungen. Solche Vorgänge treten im täglichen Leben häufig auf und sind einerseits die Ursache für viele Lärmprobleme z.B. im Bereich des Straßen-, Schienen- und besonders des Luftverkehrs, andererseits aber auch Wirkprinzip bei Blasinstrumenten, Sirenen, Signalhörnern usw.. Die genaue Vorhersage bzw. Simulation der physikalischen Vorgänge während der Schallerzeugung und Ausbreitung ist für die meisten Probleme der Strömungsakustik bis heute noch nicht in einer Weise gelöst, die es erlaubt, während der Konstruktion einer Maschine oder eines Musikinstrumentes mit vertretbarem Aufwand genügend genaue Aussagen über das akustische Verhalten der zukünftigen Maschine zu bekommen. Die Ursachen dafür sind

1. die Schwierigkeit, instationäre Strömungen, die die Ursache der Schallentstehung sind, zu berechnen. Im Maschinenbau werden für diesen Zweck zumeist nur stationäre Strömungszustände berechnet, die z.B. Turbulenz nur statistisch erfassen und durch eine entsprechend erhöhte Viskosität berücksichtigen. Die dabei eingesetzten Turbulenzmodelle beschreiben die Erzeugung und Vernichtung turbulenter Strömungsstrukturen aufgrund von Gradienten der Geschwindigkeit bzw. Dissipation. Die für die Schallentstehung wesentlichen Informationen über die instationären Strömungsfluktuationen und deren zeitliche und räumliche Korrelationen gehen dabei verloren bzw. werden nicht berechnet.
2. Die Identifikation der tatsächlich akustisch relevanten Strömungsstrukturen ist oft alles andere als einfach. In einer turbulenten Strömung wird auch unter „ungünstigen“ Umständen selten mehr als ein Prozent der in der Strömung enthaltenen Energie in Schall umgesetzt.
3. Die Ausbreitung von Schall in einer inhomogenen und turbulenten Strömung ist schwer zu beschreiben, da Wechselwirkungen der Schallwellen mit den stationären und instationären Anteilen der Strömung auftreten.

Sowohl die Schallerzeugung als auch die Ausbreitung des Schall wird prinzipiell durch Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben und kann daher auch durch Lösen eben dieser Gleichungen in einem Schritt berechnet werden. Bei den gegenwärtig gebräuchlichen Verfahren ist dieses Vorgehen jedoch unüblich, weil die zur Simulation der Strömung genutzten Rechenverfahren häufig eine zu starke Dissipation der Schallwellen zeigen. Daher werden meistens analytisch akustische Quellmodelle abgeleitet, in denen u.a. die instationären Schwankungen in der Strömung als Ursache der Schallentstehung eingehen. Aus der Kenntnis der akustischen

Quellen wird dann mittels spezieller Schallausbreitungsmodelle der Schalldruck im Fernfeld berechnet. Zu diesen Verfahren zählen z.B.

- die Akustischen Analogien [39, 17], die eine inhomogene Wellengleichung nutzen
- Boundary-Element-Verfahren, bei denen aus der Kenntnis der Schnelle bzw. des Wechseldruckes auf einer Hüllfläche um den umströmten Körper das akustische Fernfeld berechnet wird,
- die in den letzten Jahren stark weiter entwickelten Computational Aeroacoustics-Verfahren (CAA), bei denen das Schallfeld durch Lösung der meist linearisierten Eulergleichungen mit speziellen Finite-Differenzen-Verfahren berechnet wird [55]. Auch hier müssen die Schallquellen durch vorgeschaltete Modelle berechnet werden.

Die separate Berechnung von Strömungs- und Schallfeld hat den Vorteil, dass Schallfeld und Strömungsfeld gut zu trennen und damit zu erkennen sind. Andererseits bedeutet die Berechnung in zwei Schritten auch die Kopplung von unterschiedlichen Modellen, deren Zusammenwirken nicht trivial ist. Ob wesentliche Effekte wie z.B. akustisch-hydrodynamische Rückkopplungen, Dopplereffekte usw. durch die Wahl der Rechenmodelle erfasst werden können oder ob die unvermeidbaren Fehler des einen Modells das Ergebnis des anderen Modells verfälschen, muss in jedem Einzelfall genau geprüft werden. Aus diesem Grunde ist es wünschenswert, Rechenmodelle zu haben, die in der Lage sind, die Strömung, die daraus resultierende Schallquelle und die Ausbreitung des abgestrahlten Schalls in einem Schritt zu berechnen. Für kleine Mach-Zahlen kommen neben anderen Verfahren wie z.B. Finite-Differenzen die sog. athermischen Lattice-Boltzmann-Verfahren für eine Lösung strömungsakustischer Probleme in einem Schritt in Frage. Die weniger gebräuchlichen Lattice-Boltzmann-Verfahren für kompressible Strömungen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Die Entwicklung der Lattice-Boltzmann-Verfahren soll im Folgenden kurz skizziert werden. Ausführlichere Darstellungen finden sich z.B. in [50, 15, 61, 53].

Die Lattice-Boltzmann-Verfahren wurden aus den Lattice-Gas-Verfahren entwickelt, um deren spezielle Nachteile zu umgehen. Obwohl das Lattice-Boltzmann-Verfahren auch a priori aus der Boltzmann-Gleichung abgeleitet werden kann [24, 25], ist für das Verständnis der Lattice-Boltzmann-Verfahren die Kenntnis der grundlegenden Ideen der Lattice-Gas-Verfahren hilfreich.

Zunächst wird von der Idee ausgegangen, ein ideales, einatomiges Gas durch harte Kugeln zu modellieren, die außer während einer Kollision, die als elastischer Stoß angenommen wird, nicht miteinander wechselwirken. Eine Anzahl N dieser Kugeln kann durch $6N$ Koordinaten im Raum eindeutig beschrieben werden, dabei können die Koordinaten zunächst beliebige Werte annehmen. Gesucht sind die makroskopischen Größen wie Druck, Temperatur, lokale mittlere Geschwindigkeit, die als Mittelwerte der Teilchengeschwindigkeit bzw. Teilchenanzahl in einen geeigneten Testvolumen berechnet werden. Für die Simulation von Systemen aus sehr vielen Teilchen (z.B. etwa $2,7 \times 10^{25}$ Teilchen pro m^3 bei Normalbedingungen) ist diese Modellvorstellung jedoch zunächst nicht brauchbar. Aufgrund von zwei Tatsachen wird diese Modellvorstellung für Simulationen doch wieder interessant: Einerseits sind Strömungen unter bestimmten Umständen ähnlich, d.h. in Situationen mit gleicher Geometrie aber unterschiedlichen Größenskalen sind Strömungen ähnlich, wenn ihre Reynoldszahlen übereinstimmen. Diese Beobachtung gilt für große Knudsen-Zahlen, d.h. die kleinste Längenskala der betrachteten Strömung muss bedeutend größer sein als die mittlere freie Weglänge der Gasteilchen. Man

kann daher versuchen, Systeme mit sehr viel weniger Teilchen zu finden, in denen die Strömung ähnlich zu der Strömung im betrachteten Problem ist. Andererseits sind die Details der Mikrodynamik der Teilchen nicht von Interesse. Für die strömungstechnisch interessanten Größen ist die Mikrodynamik der Teilchen nicht relevant, solange makroskopisch betrachtet die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie erfüllt sind und die in der Navier-Stokes-Gleichung auftauchenden Transportkoeffizienten die richtigen Werte haben. Dies führte zu der Idee, die Teilchenzahl, und vor allem die möglichen Werte der Koordinaten der Teilchen drastisch einzuschränken, um daraus ein mit einem Computer berechenbares Modell einer Strömung abzuleiten. Der erste Versuch mit diesem Verfahren führte zu einem Modell mit einem zweidimensionalen, rechtwinkligen Gitter, auf dem sich die Teilchen folgenden Regeln gehorchend bewegen:

- Die Teilchen dürfen sich zu bestimmten Zeiten nur an den Knoten des Gitters aufhalten.
- Die Teilchen bewegen sich von einem Zeitschritt zum nächsten nur zu einem der nächsten Nachbarknoten.
- Für jede Bewegungsrichtung und jeden Knoten ist nur ein, oder kein Teilchen zugelassen.
- Kollisionen von Teilchen laufen so ab, dass die Teilchenzahl und der Gesamtimpuls erhalten bleiben.

Dies erzwingt einen sehr einfachen, endlichen Satz von Kollisionsregeln, die mit ganzzahliger Arithmetik berechenbar sind. Obwohl dieses Modell zunächst durchaus plausible Strömungsbilder lieferte, stellte sich bald heraus, dass das Modell nicht geeignet war, um reale Strömungen zu simulieren. Der Durchbruch gelang Frisch, Hasslacher und Pomeau, die zeigen konnten, dass das Problem in einer unzureichenden Gittersymmetrie des benutzten rechtwinkligen Gitters lag, und dass mit einem hexagonalen Gitter und ansonsten gleichem Ansatz die Navier-Stokes-Gleichungen für kleine Mach-Zahlen näherungsweise gelöst werden können [22].

Das Lattice-Gas-Verfahren hat jedoch eine Reihe von Nachteilen [61]. Aufgrund des statistischen Ansatzes können makroskopische Größen der Strömung nur durch Mittelung über viele Teilchen gewonnen werden. Dies verursacht ein Rauschen, das nur durch Mittelung über große Intervalle unterdrückt werden kann, was wiederum einen erheblichen Aufwand mit sich bringt.

Das Lattice-Boltzmann-Verfahren entstand als Weiterentwicklung des Lattice-Gas-Verfahrens, wobei die zentrale Idee war, nicht mehr einzelne Teilchen sondern Teilchenströme zu betrachten, die durch reelle Zahlen beschrieben werden. Damit wird der Mittelungsprozess bereits auf der Ebene der beschreibenden Gleichungen ausgeführt, was den numerischen Aufwand erheblich reduziert. Darüber hinaus lassen sich viele der oben angesprochenen Nachteile der Lattice-Gas-Verfahren beheben. Das folgende Kapitel gibt einen tieferen Einblick in die Eigenschaften des Lattice-Boltzmann-Verfahrens.

Die Lattice-Boltzmann-Verfahren sind erst etwa seit 1990 intensiv entwickelt worden, wobei der Schwerpunkt der Forschungen einerseits auf numerischen Problemen und andererseits in rein hydrodynamischen Anwendungen lag. Obwohl die prinzipielle Eignung des Verfahrens zur Untersuchung akustischer Fragen von Anfang an als sicher galt, gibt es doch nur wenige Arbeiten, die sich mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren zu Lösung strömungsakustischer Probleme befassen. Bereits 1995 simulierte Skordos die Erzeugung von Schall in Lippenpfeifen von Orgeln bzw. Blockflöten [52]. Damit konnte erstmals gezeigt werden, dass mit Lattice-Boltzmann-Verfahren Schallerzeugungsvorgänge prinzipiell erfasst und richtig berechnet werden können. Allerdings

ist diese Arbeit eher experimentell bzw. auf Implementierungsaspekte ausgerichtet. Die Thematik wurde mit verbesserter rechentechnischer Ausstattung in [33] aufgegriffen. Hier wurde das Problem in drei räumlichen Dimensionen gelöst. Buick simulierte die nichtlineare Ausbreitung von Schallwellen mit großer Amplitude und verglich die Ergebnisse mit theoretischen Vorhersagen aufgrund von Burger's Gleichung [11]. Trotz der gefundenen, guten Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen ist die Nutzbarkeit der Aussagen eingeschränkt, weil zum einen keine theoretischen Aussagen zur Beschreibung von Schallwellen durch Lattice-Boltzmann-Verfahren gemacht werden und weiterhin die Ergebnisse bei einer extrem feinen Diskretisierung (mehrere 1000 Gitterpunkte pro Wellenlänge) erzielt wurden, die im Normalfall bei strömungsakustischen Rechnungen nicht realisierbar ist. Haydock und Yeomans simulierten den sog. Acoustic-Streaming-Effekt [23]. Dabei wird die oszillierende Bewegung der Gasteilchen in einer Schallwelle durch nichtlineare Wechselwirkung zum Teil in eine konstante Bewegung in einer Richtung umgesetzt. Dies kann sowohl durch Reibungs-Effekte in einer freien Flüssigkeit als auch in der Nähe einer Wand passieren. Haydock und Yeomans vergleichen die Ergebnisse numerischer Experimente mit theoretischen Vorhersagen und stellen fest, dass das Lattice-Boltzmann-Verfahren sich zur Simulation des Acoustic-Streaming-Effektes gut eignet. Mallick, Shock und Yakhot untersuchten die Schallerzeugung eines in eine ebene Platte eingebetteten, überströmten Helmholtzresonators [41]. Der Vergleich der Druckschwankungen im Innern des Resonators ergab sehr gute Übereinstimmung mit Windkanalexperimenten und Literaturdaten.

Alle og. Arbeiten setzen die korrekte Beschreibung der Schallausbreitung durch Lattice-Boltzmann-Verfahren voraus, ohne quantitative Angaben zum diesbezüglichen Fehler zu machen. In sofern sind die erzielten Aussagen Ergebnisse numerischer Experimente. Lallemand und Luo leiten quantitative, theoretische Aussagen zu den Eigenschaften des Lattice-Boltzmann-Verfahren in Bezug auf Schallausbreitung her [35, 36]. Dazu linearisieren die Autoren die Lattice-Boltzmann-Gleichungen und führen für das resultierende Finite-Differenzen-Schema eine von-Neumann-Analyse durch. Damit leiten sie eine Näherung der Dispersionsrelation für Schallwellen her. Es fehlt jedoch eine detaillierte Analyse der Ergebnisse in Bezug auf die Abweichung der Dispersionsrelation von theoretischen Berechnungen und der Vergleich mit anderen Verfahren.

In dieser Arbeit wird der Ansatz von Lallemand und Luo aufgegriffen, jedoch werden die sich ergebenden Eigenwertprobleme nicht durch Reihenentwicklung annähernd gelöst, sondern direkt numerisch approximiert. Das Ziel dieser Arbeit ist,

1. quantitative Aussagen für die Genauigkeit der Simulation von Schallwellen mit den Lattice-Boltzmann-Verfahren zu gewinnen,
2. die Lattice-Boltzmann-Verfahren bzgl. ihrer Genauigkeit bei der Simulation von Schallwellen mit anderen Verfahren zu vergleichen,
3. anhand von ausgewählten strömungsakustischen Problemen die Eignung des Lattice-Boltzmann-Verfahrens zur Lösung strömungsakustischer Probleme quantitativ nachzuweisen.

Nach einer Einführung in die Theorie der Lattice-Boltzmann-Verfahren im Kapitel 2 wird die Simulation der Ausbreitung von Schallwellen durch Lattice-Boltzmann-Verfahren im Kapitel 3 untersucht. Im Kapitel 4 wird die Anwendung des Lattice-Boltzmann-Verfahren auf ausgewählte, strömungsakustische Probleme beschrieben. Kapitel 5 schließt mit einer Diskussion der erzielten Ergebnisse und einem Ausblick auf künftige Aufgaben die Arbeit.

Kapitel 2

Theorie des Lattice-Boltzmann-Verfahrens

In diesem Abschnitt werden kurz die Grundlagen des Lattice-Boltzmann-Verfahrens erläutert, soweit dies für eine geschlossene Darstellung erforderlich ist. Zunächst wird die Boltzmann-Gleichung eingeführt, wobei die Darstellung im wesentlichen Becker [5] folgt. Diese Gleichung wird in Form des Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modells (LBGK) diskretisiert. Zuletzt wird gezeigt, dass sich mit Hilfe der Chapman-Enskog-Entwicklung näherungsweise die Navier-Stokes-Gleichungen aus den LBGK-Gleichungen ableiten lassen.

2.1 Die Boltzmann-Gleichung

In der statistischen Mechanik wird zur Beschreibung eines Systems von N gleichartigen Teilchen mit der Masse m die Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ definiert. Die Teilchen werden hier punktförmig angenommen, d.h. sie haben keine Rotationsfreiheitsgrade. $f(\vec{x}, \vec{u}, t) d^3\vec{x} d^3\vec{u}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen in einem Gebiet mit dem Volumen $d^3\vec{x} d^3\vec{u}$ am Ort \vec{x}, \vec{u} im 6-dimensionalen Raum, der durch die jeweils drei Komponenten des Orts- bzw. Geschwindigkeitsvektors aufgespannt wird (im Folgenden Orts-Impulsraum genannt), zu finden. Ein System mit N Teilchen ist durch N Punkte im Orts-Impulsraum eindeutig beschrieben. Offensichtlich ist die Zahl der Teilchen n im Volumen V

$$n = \int_V \int f(\vec{x}, \vec{u}, t) d^3\vec{x} d^3\vec{u}$$

Die makroskopischen Größen Teilchendichte ρ , Geschwindigkeit \vec{v} , Temperatur T usw. findet man als Mittelwerte

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= \frac{1}{V} \int_V \int m f(\vec{x}', \vec{u}, t) d^3\vec{x}' d^3\vec{u} \\ \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{V} \int_V \int m \vec{u} f(\vec{x}', \vec{u}, t) d^3\vec{x}' d^3\vec{u} \\ T(\vec{x}, t) &= \frac{1}{3nk_B} \int_V \int m |\vec{u}|^2 f(\vec{x}', \vec{u}, t) d^3\vec{x}' d^3\vec{u}\end{aligned}$$

wobei V hier ein kleines Testvolumen um den Ort \vec{x} ist. Bei Systemen aus realen Gasen, die aus endlich vielen Teilchen bestehen, hat eine Messung z.B. der Teilchendichte nur dann Sinn,

wenn das Testvolumen so groß bleibt, dass die relative Schwankung der Teilchenzahl aufgrund der zufälligen Bewegungen nicht zu groß wird.

Für die Verteilungsfunktion gilt die Boltzmann-Gleichung [5]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{F_\alpha}{m} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} = \Omega \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet \vec{F} eine Volumenkraft (z.B. die Erdbeschleunigung) die im Folgenden aber stets vernachlässigt wird. $\Omega = B(\vec{x}) - A(\vec{x})$ ist die durch Kollisionen verursachte Rate der Zunahme B bzw. Abnahme A der Dichte im Orts-Impulsraum infolge von Kollisionen von Teilchen. Unter der Annahme, dass f im Volumen V vom Ort \vec{x} unabhängig ist, können die Dichteänderungen A und B bestimmt werden: Betrachtet werden nur Kollisionen von zwei Teilchen gleicher Masse, während der Kollision wirken nur Kräfte aus der Wechselwirkung dieser beiden Teilchen miteinander. Ein solcher Stoß muss neben der Teilchenzahl auch den Impuls und die Energie der Teilchen erhalten. Wenn die Teilchen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten \vec{u}_1 und \vec{u}_2 und nach dem Stoß die Geschwindigkeiten \vec{u}'_1 und \vec{u}'_2 haben, muss gelten:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 + \vec{u}_2 &= \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2 \\ |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 &= |\vec{u}'_1|^2 + |\vec{u}'_2|^2 \end{aligned}$$

Befinden sich in einem Volumen V N_1 Teilchen mit der Geschwindigkeit \vec{u}_1 und N_2 Teilchen mit der Geschwindigkeit \vec{u}_2 , so sei die Anzahl der Teilchen, die im Zeitintervall Δt eine Kollision erleiden und anschließend eine Geschwindigkeit im Bereich $d^3\vec{u}'_1$ bzw. $d^3\vec{u}'_2$ um \vec{u}'_1 bzw. \vec{u}'_2 haben $N_1 N_2 \Delta t s(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2) d^3\vec{u}'_1 d^3\vec{u}'_2$, d.h. $s(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ beschreibt die Dichteänderungen im Orts-Impulsraum durch Kollisionen. Aus der Forderung, dass die Gleichungen der Impuls- und Energieerhaltung in jedem Inertialsystem gelten müssen, lässt sich ableiten, dass s folgende Symmetrieeigenschaften hat:

$$\begin{aligned} s(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2) &= s(\vec{u}_2, \vec{u}_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_1) \text{ (Teilchenvertauschung)} \\ s(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2) &= s(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ (Zeitumkehr)} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u}_1, t)}{\partial t} = - \int_V \int \int \int (f(\vec{x}', \vec{u}_1, t) f(\vec{x}', \vec{u}_2, t) - f(\vec{x}', \vec{u}'_1, t) f(\vec{x}', \vec{u}'_2, t)) s(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2) d^3\vec{u}_2 d^3\vec{u}'_1 d^3\vec{u}'_2 d^3\vec{x}' \quad (2.2)$$

Die Position \vec{x} im Argument von f auf der linken Seite der Gleichung bezeichnet den Ort des Testvolumens V , in dem die Mittelung durchgeführt wird. Im stationären Fall gilt $\partial f / \partial t = 0$, was offenbar durch

$$f(\vec{u}_1, t) f(\vec{u}_2, t) = f(\vec{u}'_1, t) f(\vec{u}'_2, t)$$

erfüllt ist. Aufgrund der Erhaltung von Impuls und Energie muss sich das Produkt $f(\vec{u}_1, t) f(\vec{u}_2, t)$ als Funktion $F(\vec{u}_{ges}, W)$ ausdrücken lassen, wobei $\vec{u}_{ges} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ und $W =$

$|\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2$ ist. Bildet man von der Gleichung $f(\vec{u}_1)f(\vec{u}_2) = F$ den Logarithmus, so führt das schließlich zur Erkenntnis, dass f die Form der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung

$$f = \frac{1}{V} \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^3} e^{-\frac{m|\vec{u}|^2}{2k_B T}} \quad (2.3)$$

haben muss. Es kann gezeigt werden, dass die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für einen stationären Zustand notwendig ist. Dieser Sachverhalt ist äquivalent mit dem Boltzmann'schen H -Theorem, das besagt, dass die Entropie eines abgeschlossenen Systems

$$H = \int f(\vec{u}) \ln f(\vec{u}) d\vec{u}$$

als Funktion der Zeit stets nur zunehmen, oder im stationären Zustand, konstant bleiben kann, also

$$\frac{dH}{dt} \geq 0$$

Eine vergleichbare Herleitung ist auch für den Fall möglich, dass Mehr-Teilchen-Kollisionen zugelassen werden [8].

Die Boltzmanngleichung ist in der hier vorgestellten Form für numerische Berechnungen schlecht zugänglich, weil das Kollisionsintegral überaus kompliziert, bzw. falls Mehr-Teilchen-Kollisionen zugelassen werden, mit endlichem Aufwand nicht berechenbar ist. Es wurde daher nach Vereinfachungen gesucht, die die wesentlichen Eigenschaften des Kollisionsintegrals (Masse-, Impuls- und Energieerhaltung sowie Einhaltung des H -Theorems) erhalten, jedoch einfacher zu berechnen sind. Eine mögliche Formulierung wurde durch Bhatnagar, Gross und Krook [6] vorgeschlagen:

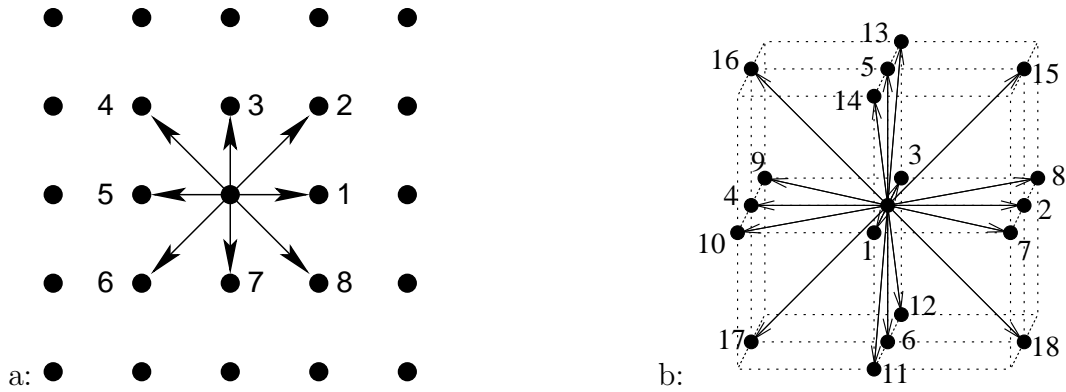
$$\Omega \approx J(f) = \omega (f^{eq}(\vec{x}, \vec{u}) - f(\vec{x}, \vec{u})) \quad (2.4)$$

Hierin ist f^{eq} die Gleichgewichtsverteilung, d.h. die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung. $\omega = 1/\tau$ ist die Rate, mit der die lokale Verteilung dem Gleichgewicht zustrebt. τ stellt somit ein Relaxationszeit dar. Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie sind erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \int \int J(f) d\vec{x} d\vec{u} &= \int \int f^{eq}(\vec{x}, \vec{u}) - f(\vec{x}, \vec{u}) d\vec{x} d\vec{u} = 0 \\ \int \int \vec{u} J(f) d\vec{x} d\vec{u} &= \int \int \vec{u} (f^{eq}(\vec{x}, \vec{u}) - f(\vec{x}, \vec{u})) d\vec{x} d\vec{u} = 0 \\ \int \int |\vec{u}|^2 J(f) d\vec{x} d\vec{u} &= \int \int |\vec{u}|^2 (f^{eq}(\vec{x}, \vec{u}) - f(\vec{x}, \vec{u})) d\vec{x} d\vec{u} = 0 \end{aligned}$$

2.2 Das Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell

Für strömungsakustische Probleme ist die Lösung der kompletten Boltzmanngleichung nicht erforderlich. Man kann i.A. davon ausgehen, dass in Strömungen mit kleiner Mach-Zahl die Abweichungen der Geschwindigkeitsverteilung von ihrem Gleichgewichtswert nur sehr klein sind. Daher ist die Geschwindigkeitsverteilung nicht von Interesse, gesucht sind vielmehr die makroskopischen Größen einer Strömung wie z.B. Druck, Geschwindigkeit, Temperatur usw.. Es liegt daher nahe, die Boltzmanngleichung (2.1) insbesondere im Impulsraum sehr grob zu diskretisieren und die zwangsläufig grobe Näherung der Verteilungsfunktion zu akzeptieren,



Abbildungung 2.1: Nachbarschaftsmodelle D2Q9 (a) und D3Q19 (b). Die Teilchen können sich in zwei Dimensionen während eines Zeitschrittes von einem Gitterknoten zu einem der acht nächsten Nachbarknoten bewegen, oder am Knoten verharren (8+1 Bewegungszustände), bzw. in 3 Dimensionen zu einem der 18 Nachbarn oder am Knoten verharren.

in der Hoffnung, dass die makroskopischen Größen, die aus der numerischen Lösung der diskretisierten Gleichung resultieren, davon nicht allzu sehr beeinflusst werden. Wie zahlreiche numerische Experimente zeigen, ist diese Hoffnung gerechtfertigt.

Das Kontinuum der möglichen Positionen und Impulse wird eingeschränkt auf ein regelmäßiges Gitter, dessen Knoten die möglichen Positionen für Teilchen definieren. Weiterhin wird analog zu den Lattice-Gas-Automaten gefordert, dass die Teilchen während eines Zeitschrittes nur von einem Knoten zu einem der umliegenden Knoten bewegen können. Welche Knoten dies im Einzelnen sind, kann innerhalb gewisser Grenzen gewählt werden. Die Wahl des „Nachbarschaftsmodells“ beeinflusst dabei die physikalischen Eigenschaften des Lattice-Boltzmann-Modells. Einerseits muss bei der Wahl auf eine ausreichende Symmetrie des Modells geachtet werden, um keine zu starke Anisotropie in das Modell einzuführen. Andererseits kann die Temperatur in Lattice-Boltzmann-Modellen abgebildet werden, sofern ein geeignetes Nachbarschaftsmodell gewählt wird [36]. In dieser Arbeit werden nur die am weitesten verbreiteten, nicht-thermischen Modelle betrachtet. Abbildung 2.1 zeigt das D2Q9-Modell und das D3Q19-Modell. Die Bezeichnung leitet sich aus der Tatsache ab, dass dieses Modell in zwei (drei) Dimensionen („D2“ oder „D3“) mit neun (neunzehn) verschiedenen Bewegungszuständen arbeitet („Q9“ oder „Q19“), nämlich Ruhe und Bewegung zu einem der 8 (18) nächsten Nachbarn eines Gitterknotens. Es werden entsprechend der Anzahl der zulässigen Bewegungszustände Q Gittervektoren $\Delta\vec{x}_i$ eingeführt, die von einem Gitterpunkt ausgehend zu einem der zulässigen Nachbarn zeigen. Da die Zahl der möglichen Positionen sehr viel größer als die Zahl Q der möglichen Bewegungszustände ist, wird die Verteilungsfunktion üblicherweise durch einen Vektor in einem Raum mit Q Dimensionen beschrieben. Diese vektorwertige Funktion ist dann nur noch vom Ort und der Zeit abhängig. Mit diesen Definitionen lautet die Gitter-Boltzmann-Gleichung

$$f_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}_i, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) + \Omega_i(f_i(\vec{x}, t)) \quad (2.5)$$

Ebenso wie im kontinuierlichen Fall wird die Bhatnagar-Gross-Krook-Näherung für den Kollisionsoperator genutzt [61]:

$$\Omega_i = -\frac{\Delta t}{\tau}(f_i - f_i^{eq})$$

mit der Gleichgewichtsfunktion [36]

$$f_i^{eq}(\rho, \vec{v}) = w_i \rho \left(1 + \frac{1}{c^2} \left(3(\vec{c}_i \cdot \vec{v}) + \frac{9}{2c^2} (\vec{c}_i \cdot \vec{v})^2 - \frac{3}{2} |\vec{v}|^2 \right) \right) \quad (2.6)$$

und den Gewichten w_i , die vom benutzten Gitter abhängen. Hier wurden die Teilchenmasse und die verschiedenen Volumenelemente in die Funktion f_i absorbiert. Die Funktion f_i hat also die physikalische Einheit der Massendichte. Δt ist die Zeitschrittweite des Verfahrens und Δx die räumliche Gitterweite. Damit ist $c = \Delta x / \Delta t$ und $\vec{c}_i = \Delta \vec{x}_i / \Delta t$. Die Gleichgewichtsfunktion kann je nach physikalischem Problem noch weitere Terme enthalten, die dann z.B. Oberflächenspannungen, Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Teilchensorten usw. repräsentieren. Solche Anwendungen werden in dieser Arbeit jedoch nicht betrachtet.

Die makroskopischen Größen ρ und \vec{v} berechnen sich als Momente der Verteilung f

$$\rho = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i \quad (2.7)$$

$$\rho \vec{v} = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i \vec{c}_i \quad (2.8)$$

2.3 Vom Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell zur Navier-Stokes-Gleichung

Zur Ableitung der Navier-Stokes-Gleichungen aus den LBGK-Gleichungen bieten sich im vorliegenden Fall zwei Verfahren an: Der „klassische“ Weg führt über die Anwendung der Chapman-Enskog-Entwicklung [32, 57]. Alternativ können die linearisierten Gleichungen auch aus einer von-Neumann-Analyse gewonnen werden [35, 36]. Die erste Methode hat den Vorteil, dass hierbei die nicht-linearen Glieder berechnet werden können, allerdings gilt die Entwicklung nur, wenn die Strömungsprobleme räumlich sehr fein aufgelöst werden. Die von-Neumann-Analyse lässt sich für beliebige räumliche Auflösungen anwenden, liefert allerdings nur linearisierte Gleichungen. In diesem Kapitel wird die Chapman-Enskog-Entwicklung zur Berechnung der Transportkoeffizienten der Navier-Stokesgleichung genutzt, während die von-Neumann-Analyse im nächsten Kapitel zur Ableitung der akustischen Eigenschaften der Lattice-Boltzmann-Verfahren benutzt wird.

2.3.1 Chapman-Enskog-Entwicklung

Im folgenden werden die Navier-Stokes-Gleichungen aus den LBGK-Gleichungen mittels der Chapman-Enskog-Entwicklung abgeleitet. Diese Darstellung folgt im Wesentlichen [28], wobei hier die Koeffizienten des D2Q9-LBGK-Modells bzw. des D3Q19-LBGK-Modells als gegeben angenommen werden, um die Darstellung zu vereinfachen. Die vom Gitter abhängigen Gewichtungsfaktoren w_i lauten für das D2Q9-Gitter:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{für } i = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{für } i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{36} & \text{für } i = 2, 4, 6, 8 \end{cases}$$

und für das D3Q19 Gitter:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für } i = 0 \\ \frac{1}{18} & \text{für } i = 1, \dots, 6 \\ \frac{1}{36} & \text{für } i = 7, \dots, 18 \end{cases}$$

Im Folgenden wird des öfteren von folgenden Gleichungen Gebrauch gemacht, die mit den o.g. Gewichten sowohl für das D2Q9 als auch für das D3Q19-Gitter gelten:

$$\begin{aligned} \sum_i w_i &= 1 \\ \frac{1}{c} \sum_i w_i c_{i\alpha} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} &= \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \\ \frac{1}{c^3} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} &= 0 \\ \frac{1}{c^4} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\varphi} &= \frac{1}{9} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\varphi} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\varphi} + \delta_{\alpha\varphi} \delta_{\beta\gamma}) \end{aligned}$$

Zunächst wird die LBGK-Gleichung in die Form

$$f_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}_i, t + \Delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{eq} - f_i(\vec{x}, t)) \quad (2.9)$$

gebracht. Die linke Seite dieser Gleichung wird mit einer Taylor-Reihe approximiert:

$$f_i(\vec{x} + \varepsilon \Delta\vec{x}_i, t + \varepsilon \Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^n f_i(\vec{x}, t)$$

Hier hat ε die Rolle eines formalen Parameters, der am Ende zu 1 gesetzt wird. Man erhält unter Berücksichtigung von Summanden bis zur 2. Ordnung in ε

$$\varepsilon \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) f_i + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^2 f_i = \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (2.10)$$

Weiter wird die Verteilungsfunktion f_i gemäß einer Multi-Skalen-Entwicklung nach Chapman-Enskog entwickelt:

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)}$$

Dabei sei $f_i^{(0)} = f_i^{eq}$, was die Forderungen

$$\sum_i f_i^{(n)} = \begin{cases} \rho & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

und

$$\sum_i \vec{c}_i f_i^{(n)} = \begin{cases} \rho \vec{u} & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

nach sich zieht.

Es werden drei Zeitskalen t_0, t_1, t_2 eingeführt mit

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}$$

Mit diesen Ersetzungen erhält man in erster Ordnung $O(\varepsilon)$:

$$\left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t_0} + \Delta x_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) f_i^{(0)} = -\frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(1)} \quad (2.13)$$

Aufgrund von Gl. (2.11) folgt hieraus die Erhaltungsgleichung für die Masse

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho v_\alpha = 0 \quad (2.14)$$

in erster Ordnung. Multipliziert man Gl. (2.13) mit $c_{i\alpha}$ folgt mit Gl. (2.12)

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \rho v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(0)} = 0 \quad (2.15)$$

Definiert man Impulsflussdichtetensor Π als

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i$$

so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \rho v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$$

Setzt man in diese Gleichung den Ausdruck für die Gleichgewichtsfunktion f_i^{eq} aus Gl. (2.6) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(0)} \\ &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i \rho \left(1 + \frac{1}{c^2} \left(3c_{i\gamma} v_\gamma + \frac{9}{2c^2} (c_{i\gamma} v_\gamma)^2 - \frac{3}{2} |\vec{v}|^2 \right) \right) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{3} c^2 \rho \delta_{\alpha\beta} + \rho v_\alpha v_\beta \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Euler-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (p \delta_{\alpha\beta} + \rho v_\alpha v_\beta) = 0$$

zeigt, dass Gl. (2.15) in die Euler-Gleichung übergeht, sofern $p \propto \rho/3$ ist. Mit der vereinfachten Zustandsgleichung $p = c_0^2 \rho$ findet man die Schallgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

In zweiter Ordnung erhält man $O(\varepsilon^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} f_i^{(0)} + \frac{\partial}{\partial t_0} f_i^{(1)} + \frac{1}{2\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t_0} + \Delta x_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^2 f_i^{(0)} + c_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f_i^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)} \quad (2.16)$$

woraus mit Gl. (2.11) und (2.12)

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \rho = 0 \quad (2.17)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \rho v_\alpha + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = 0 \quad (2.18)$$

folgt. Um die Erhaltungsgleichungen 2. Ordnung aufstellen zu können, muss also $\Pi^{(1)}$ bestimmt werden. Mit Gl. (2.13) ergibt

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(1)} \\ &= -\tau \frac{\partial}{\partial t_0} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{(0)} - \tau \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{(0)} \end{aligned}$$

Für $f_i^{(0)}$ kann wieder die Näherung (2.6) eingesetzt werden, was nach einiger Rechnung auf

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -\tau c_0^2 \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\alpha \right)$$

führt.

Aus den Erhaltungsgleichungen, die für die erste Ordnung $O(\varepsilon)$ abgeleitet wurden (Gl. (2.14) und (2.15)) und deren Korrekturen in zweiter Ordnung (Gl. (2.17) und (2.18)) folgen die vollständigen Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho v_\alpha + O(\varepsilon^3) = 0 \quad (2.19)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho v_\alpha v_\beta + O(\varepsilon^3) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} p + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\tau c_0^2 \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\alpha \right) \right) \quad (2.20)$$

Der Vergleich mit den Navier-Stokesgleichungen zeigt, dass Gl. (2.19) und (2.20) in zweiter Ordnung in die Navier-Stokes-Gleichungen übergehen, wenn

$$\nu = \eta / \rho = \frac{1}{6} \left(\frac{2\tau}{\Delta t} - 1 \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad (2.21)$$

gewählt wird. Allerdings ergibt sich die zweite Viskosität¹ zwangsläufig zu [18]

$$\eta' = \frac{2}{3} \eta \quad (2.22)$$

¹Die Bezeichnungen für Druck bzw. Volumenviskosität sind in der Literatur uneinheitlich [18]. In dieser Arbeit wird die in der Literatur zu Lattice-Boltzmann-Verfahren am meisten verbreitete Nomenklatur entsprechend Landau/Lifschitz [37, 18] verwendet. Die erste Viskosität entspricht der Scherviskosität, die zweite Viskosität der Volumenviskosität.

Für ein ideales, einatomiges Gas sollte die zweite Viskosität Null sein [18], d.h. es handelt sich hier um einen Fehler in der Modellbildung. Es ist allerdings durch Einführung der sogenannten Multiple-Relaxation-time (MRT) Modelle möglich, die zweite Viskosität ebenfalls den Erfordernissen anzupassen [35, 18].

Mit den Gleichungen (2.19) und (2.20) ist ein wichtiger Baustein gefunden: Aus den Navier-Stokes-Gleichungen folgen die Schallerzeugung und Ausbreitung beschreibenden Gleichungen, insbesondere die Wellengleichung [39, 31, 38]. Wenn die LBGK-Gleichungen eine gültige Näherung der Navier-Stokes-Gleichungen sind, sollten sie auch die Schallerzeugung und Ausbreitung beschreiben.

2.4 Das Multiple-Relaxation-Time-Modell

Das sogenannte Multiple-Relaxation-Time-Modell [19, 20] ist eine Erweiterung des Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modells mit dem Ziel, einerseits ein stabileres Rechenverfahren und andererseits mehr Kontrolle über die physikalischen Parameter des Modell, namentlich die Prandtl-Zahl (Verhältnis von kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit) und das Verhältnis von erster und zweiter Viskosität zu bekommen. Der Idee liegt die Beobachtung zugrunde, dass in den Rechnungen mit dem Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell an geometrischen Unstetigkeiten oft schachbrettartige Feldverteilungen auftreten, die das Rechengitter widerspiegeln. Diese Feldverteilungen werden durch instabile oder sehr schwach gedämpfte Moden des Rechenverfahrens erzeugt (checkerboard-modes), welche nicht physikalische Eigenschaften des Fluides modellieren, sondern reine Artefakte des mathematischen Modells sind. Wenn es gelingt, die „physikalischen“ Moden des Verfahrens von den „unphysikalischen“ Moden zu separieren und stärker zu bedämpfen, sollte ein stabileres und zugleich genaueres Verfahren das Ergebnis sein.

Zur Separation der Moden werden zunächst folgende Momente der Verteilung f eingeführt. Man erhält [35]

$$\vec{q} = \mathbf{M} \vec{f} \quad (2.23)$$

mit \vec{q} und \mathbf{M} für das D2Q9-Modell [35]

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ e \\ \epsilon \\ j_x \\ q_x \\ j_y \\ q_y \\ p_{xx} \\ p_{xy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und für das D3Q19-Modell [20]

$$\vec{q} = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, j_z, q_z, p_{xx}, \pi_{xx}, p_{yy}, \pi_{yy}, p_{zz}, \pi_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{xz}, m_x, m_y, m_z)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -30 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gittervektoren sind hier abweichend vom vorigen Abschnitt durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Komponenten ϱ_i von $\vec{\varrho}$ haben eine physikalische Bedeutung: ρ ist die Dichte, e die Energie, ϵ das Quadrat der Energie, $j_{x,y,z}$ der Massefluss in der jeweiligen Koordinatenrichtung, $q_{x,y,z}$ der Energiefluss, $p_{\alpha,\beta}$ sind die Komponenten des Spannungstensors.

Die Relaxationsgleichungen werden nun im Momentenraum formuliert. Wenn ϱ_i eine Größe vor dem Stoß und ϱ_i^* die Größe nach dem Stoß bezeichnet, so gilt:

$$\varrho_i^* = \varrho_i - s_i(\varrho_i - \varrho_i^{eq}) \quad (2.24)$$

wobei die s_i hier die Rolle des Relaxationsfaktors $\Delta t/\tau$ im Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell übernehmen. Da die Dichte und die Komponenten des Impulses erhalten bleiben müssen, folgt $\varrho_i^{eq} = \varrho_i$ für die i , die Masse oder Impuls beschreiben. Die entsprechenden s_i sind folglich irrelevant. Der Einfachheit halber wählt man die entsprechenden s_i :

$$\begin{aligned} s_1 &= s_4 = s_6 = 0 && \text{für das D2Q9-Modell} \\ s_1 &= s_4 = s_6 = s_8 = 0 && \text{für das D3Q19-Modell} \end{aligned}$$

Mit den übrigen s_i kann die erste und zweite Viskosität eingestellt werden, einige s_i sind sogar ganz ohne physikalische Bedeutung und können frei gewählt werden, um das Verfahren so stabil wie möglich zu machen. Im Folgenden bezeichnet \mathbf{S} die Diagonalmatrix der s_i :

$$\mathbf{S} = -\text{diag}(s_i)$$

Die Gleichgewichtswerte der Momente sind [35]

$$\begin{aligned}
e^{eq} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) \\
\epsilon^{eq} &= \rho - 3(j_x^2 + j_y^2) \\
q_x^{eq} &= -j_x \\
q_y^{eq} &= -j_y \\
p_{xx}^{eq} &= (j_x^2 - j_y^2) \\
p_{xy}^{eq} &= j_x j_y
\end{aligned}$$

im zweidimensionalen Falle und [20]

$$\begin{aligned}
e^{eq} &= -11\rho + \frac{19}{\rho}(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2) \\
\epsilon^{eq} &= w_\epsilon \rho + \frac{w_{\epsilon j}}{\rho}(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2) \\
q_x^{eq} &= -\frac{2}{3}j_x, \quad q_y^{eq} = -\frac{2}{3}j_y, \quad q_z^{eq} = -\frac{2}{3}j_z \\
p_{xx}^{eq} &= \frac{1}{3\rho}(2j_x^2 - (j_y^2 + j_z^2)), \quad p_{yy}^{eq} = \frac{1}{\rho}(j_y^2 - j_z^2) \\
p_{xy} &= \frac{1}{\rho}j_x j_y, \quad p_{yz} = \frac{1}{\rho}j_y j_z, \quad p_{xz} = \frac{1}{\rho}j_x j_z \\
\pi_{xx}^{eq} &= w_{xx} p_{xx}^{eq}, \quad \pi_{yy}^{eq} = w_{yy} p_{yy}^{eq} \\
m_x^{eq} &= m_y^{eq} = m_z^{eq} = 0
\end{aligned}$$

im dreidimensionalen Falle, wobei $w_\epsilon, w_{\epsilon j}, w_{xx}$ freie Parameter sind.

Die in den Momentenraum transformierten Verteilungen \vec{f} werden mit Hilfe der obigen Gleichungen entspannt und mit der Inversen der Transformationsmatrix \mathbf{M}^{-1} zurück transformiert. Der Propagationsschritt ist analog zum Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell. Damit ergibt sich für das Multiple-Relaxation-Time-Modell die Berechnungsvorschrift

$$f_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}_i, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) + \left(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(\vec{q} - \vec{q}^{eq}) \right)_i \quad (2.25)$$

mit $\vec{q} = \mathbf{M}\vec{f}$. Wählt man im zweidimensionalen Modell alle $s_i = \Delta t / \tau$, bzw. im dreidimensionalen Modell zusätzlich $w_\epsilon = 3$, so reduziert sich das Multiple-Relaxation-Time-Modell auf das entsprechende Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell.

Im D2Q9-MRT-Modell wird die erste Viskosität durch die Parameter s_8 und s_9 analog zum entsprechenden LBGK-Verfahren bestimmt:

$$\nu = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{s_8} - 1 \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{s_9} - 1 \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

Bei dem D3Q19-Modell muss $s_{10}, s_{12}, s_{14}, s_{15}$ und s_{16} analog zu s_8, s_9 im 2D-Fall gewählt werden. Die zweite Viskosität ist durch

$$\begin{aligned}
\nu' &= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{s_2} - 1 \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} && \text{für das D2Q9-MRT Modell} \\
\nu' &= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{s_2} - 1 \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} && \text{für das D3Q19-MRT Modell}
\end{aligned}$$

gegeben. Damit sind im D2Q9-Modell die Parameter s_3 , s_5 und s_7 , bzw. im D3Q19-Modell die s_i mit $i = 3, 5, 11, 17$ frei wählbar und können somit genutzt werden, um die Stabilität des Verfahrens zu optimieren. Die übrigen Relaxationsparameter sind dann durch die Werte der Transportkonstanten und die Isotropieforderung festgelegt. Derzeit existiert kein analytisches Verfahren zur Optimierung der freien Parameter. In der Praxis werden daher die freien Parameter anhand von Stabilitätsanalysen der linearisierten Verfahren bewertet und manipuliert, bis eine akzeptable Kombination gefunden ist.

Kapitel 3

Numerische Aspekte der Beschreibung von Schallwellen in einem Lattice-Boltzmann-Modell

3.1 Die Physik der Schallausbreitung

Die Wellengleichung, die die Ausbreitung von Schallwellen in Fluiden beschreibt, wird aus den Navier-Stokes-Gleichungen gewonnen, in dem die durch die Schallwellen verursachten Abweichungen der Zustandsgrößen Druck, Dichte und Geschwindigkeit von ihren jeweiligen Mittelwerten als klein betrachtet werden, die Größen werden dann als Summe von stationärem Anteil und der akustischen Schwankung geschrieben:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= p_0 + p'\end{aligned}$$

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die stationären Größen räumlich und zeitlich konstant sind, weiterhin wird ein Inertialsystem zur Betrachtung gewählt, in dem $\vec{v}_0 = 0$. Damit kann die Erhaltungsgleichung für die Masse wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho')\vec{v}') = 0$$

Durch Vernachlässigung des Terms 2. Ordnung erhält man

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \tag{3.1}$$

Die Erhaltungsgleichung für den Impuls wird durch Vernachlässigung von Reibung und Termen 2. Ordnung auf die Form

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0 \tag{3.2}$$

gebracht. Mit der Annahme, dass die Ausbreitung von Schallwellen ein isentroper Vorgang ist, folgt für die Druckstörung p'

$$p' \approx \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right|_s \rho'$$

Identifiziert man den Proportionalitätsfaktor von p' und ρ' mit c_0^2 , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla p' &= 0 \end{aligned}$$

Nun wird die Impulserhaltungsgleichung partiell nach der Zeit abgeleitet und von der Divergenz der Masseerhaltungsgleichung subtrahiert. Man erhält

$$\frac{\partial^2 \vec{v}'}{\partial t^2} - c_0^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}') = 0 \quad (3.3)$$

Die Diskussion bezieht sich im Folgenden nur auf ebene Wellen, die parallel zur x -Achse laufen. Berücksichtigt man unter Beibehaltung der oben gemachten, vereinfachenden Annahmen die Effekte durch viskose Reibung, so kommt in der Gleichung für die Erhaltung des Impulses der entsprechende Term hinzu [16]

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

mit der ersten Viskosität η und der zweiten Viskosität η' . Diese Gleichung kann wie oben mit der Kontinuitätsgleichung der Masse kombiniert werden. Man erhält

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

Eine gedämpfte, ebene Welle hat die Form

$$v'(x, t) = v_0 e^{i(kx - \omega t) - \alpha t}$$

Wird diese Gleichung in die Wellengleichung (3.5) eingesetzt, so führt das zu

$$(i\omega + \alpha)^2 + k^2 \left(c_0^2 - \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) (i\omega + \alpha) \right) = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt für

$$\alpha = \frac{k^2 \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right)}{2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\omega}{k} = c_0 \sqrt{1 - \frac{k^2 \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right)^2}{4c_0^2}} \quad (3.7)$$

Für Luft mit $c_0 = 340$ m/s hat $\frac{4}{3} \nu + \nu'$ etwa den Wert $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (Näherung als ideales Gas, Vernachlässigung von Rotationsfreiheitsgraden der Moleküle $\rightarrow \nu' = 0$), bei einer Frequenz von

1 kHz ergibt sich $\alpha \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $k^2(\frac{4}{3}\nu + \nu')^2/(4c_0^2) \approx 3 \cdot 10^{-13}$. Das bedeutet, dass die Dämpfung der Schallwellen durch viskose Reibung im hörbaren Frequenzbereich nur bei sehr hohen Frequenzen eine Rolle spielt, der Einfluss auf die Phasengeschwindigkeit der Schallwellen ist vernachlässigbar. Es stellt sich heraus, dass die Effekte durch Anregung von Rotations- und Vibrationsfreiheitsgraden bei mehratomigen Gasen sehr viel mehr zur Dissipation von Schallwellen beitragen [16, Band II, Kapitel 14]. Diese Effekte können nicht durch ein Modell, das auf der Vorstellung eines einatomigen Gases beruht, wiedergegeben werden. Es sei jedoch an dieser Stelle darauf verwiesen, dass es bei Nutzung der Lattice-Boltzmannmodelle mit multiplen Relaxationszeiten durchaus möglich ist, die zweite Viskosität den Erfordernissen entsprechend einzustellen [18].

3.2 Beschreibung der Schallausbreitung durch Lattice-Boltzmann-Verfahren

Die Ausbreitung von Schallwellen beruht vor allem auf linearen Effekten, Reibung und Nicht-linearitäten spielen zumindest bei moderaten Schalldrücken eine untergeordnete Rolle. Daher liegt der Gedanke nahe, für die Analyse der akustischen Eigenschaften des Verfahrens die nicht-linearen Terme in der Gleichgewichtsfunktion des BGK-Kollisionsoperators zu vernachlässigen.

Die Gleichgewichtsfunktion f_i^{eq} (Gl. (2.6)) ist nichtlinear abhängig von der Verteilung f . Für die Beschreibung der linearen Schallausbreitung sollte aber eine linearisierte Form der rechten Seite von Gl. 2.5 genügen. Wir betrachten kleine Abweichungen vom Anfangszustand $\rho = \rho_0$, $\vec{u} = 0$, es gelte

$$f = f^{(0)} + \Delta f$$

Damit wird die Evolutionsgleichung zu

$$\begin{aligned} \Delta f_i(\vec{x} + \Delta \vec{x}_i, t + \Delta t) - \Delta f_i(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\tau^*} (f_i - f_i^{eq}) \\ &= -\frac{1}{\tau^*} (\Delta f_i(\vec{x}, t) - \Delta f_i^{eq}) \end{aligned}$$

(es gilt $f_i^{eq}(\rho_0, 0) = f_i^{(0)}$) mit $\tau^* = \tau/\Delta t$. Die rechte Seite wird in eine Taylor-Reihe in erster Ordnung entwickelt, man erhält

$$\Delta f_i(\vec{x} + \Delta \vec{x}_i, t + \Delta t) = \frac{1}{\tau^*} \left(\left. \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial f_j} \right|_{f_j=f_j^{(0)}} + (\tau^* - 1)\delta_{ij} \right) \Delta f_j(\vec{x}, t)$$

Definiert man den Translationsoperator \mathbf{A} durch seine Wirkung auf f

$$\mathbf{A}f_i(\vec{x}, t) = f_i(\vec{x} + \Delta \vec{x}_i, t)$$

so kann die linearisierte Evolutionsgleichung in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \Delta \vec{f}(\vec{x}, t + \Delta t) = \mathbf{L} \Delta \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (3.8)$$

mit

$$\mathbf{L}_{ij} = \frac{1}{\tau^*} \left(\left. \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial f_j} \right|_{f_j=f_j^{(0)}} + (\tau^* - 1)\delta_{ij} \right)$$

geschrieben werden. Zur weiteren Betrachtung wird das System räumlich Fourier-transformiert, der Translationsoperator ist dann [35]

$$A_{ij} = e^{i\Delta\vec{x}_i \cdot \vec{k}} \delta_{ij}$$

mit dem Wellenzahlvektor \vec{k} . Damit erhält man das Eigenwertproblem

$$z \Delta \vec{f} = A^{-1} L \Delta \vec{f} \quad (3.9)$$

aus dessen Lösung die Dispersionsrelation

$$\det(A^{-1} L - z1) = 0 \quad (3.10)$$

folgt. Schreibt man die Eigenwerte z als

$$z = e^{i(k \Delta x - \omega_{LBM} \Delta t) - \alpha_{LBM} \Delta t}$$

so erhält man mit ω_{LBM} und α_{LBM} Werte, die mit den theoretischen Werten aus den Gleichungen (3.6) und (3.7) verglichen werden können.

Die entsprechenden Gleichungen für das Multiple-Relaxation-Time-Verfahren folgen in ähnlicher Weise aus Gl. (2.25). Wegen $\vec{f} = \vec{f}^{(0)} + \Delta \vec{f}$ lässt sich Gl. (2.25) mit dem Translationsoperator schreiben als

$$A \Delta \vec{f}(\vec{x}, t + \Delta t) = \Delta \vec{f}(\vec{x}, t) + M^{-1} S(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}^{eq})$$

Mit

$$C_{ij} = \left. \frac{\partial(\varrho_i - \varrho_i^{eq})}{\partial \varrho_j} \right|_{\varrho_j = \varrho_j^{eq}}$$

wird der zweite Term auf der rechten Seite mit einer Taylorreihe in erster Ordnung entwickelt

$$\vec{\varrho} - \vec{\varrho}^{eq} \approx C \Delta \vec{\varrho} = CM \Delta \vec{f}$$

Die linearisierte Form der Gl. (2.25) ist damit

$$A \Delta \vec{f}(\vec{x}, t + \Delta t) = (1 + M^{-1} SCM) \Delta \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Mit

$$L = 1 + M^{-1} SCM$$

erhält man die selbe Form wie Gl. (3.8).

Wie im vorigen Kapitel abgeleitet wurde, hängt die Schallgeschwindigkeit c_0 direkt proportional vom Verhältnis der Gitterweite Δx zum Zeitschritt Δt ab. Es gilt $c_0 = \Delta x / (\sqrt{3} \Delta t)$, d.h. die Gitterweite kann bei den hier betrachteten Lattice-Boltzmann-Verfahren nicht unabhängig vom Zeitschritt gewählt werden. Eine getrennte Betrachtung der räumlichen und der Zeitdiskretisierung, wie es z.B. bei den Finite-Differenzen-DRP-Verfahren üblich ist [54], erübrigt sich damit.

Um Missverständnissen vorzubeugen sei darauf hingewiesen, dass die Linearisierung nur zur Untersuchung der numerischen Eigenschaften des Verfahrens dient. Das linearisierte Modell wird an keiner Stelle tatsächlich zu Simulationen von Strömungsproblemen genutzt.

3.3 Dispersion und Dissipation von Schallwellen im 2D-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell

Die Beschreibung der Ausbreitung von ebenen Schallwellen durch lineare, diskrete numerische Modelle kann in zweierlei Hinsicht von den theoretischen Vorgaben abweichen: Einerseits können die Dämpfungseffekte und andererseits die Phasengeschwindigkeiten der Wellen fehlerhaft sein. Im Folgenden wird der Einfluss der Viskosität auf die Schallgeschwindigkeit vernachlässigt, d.h. es wird von einer konstanten, von der Viskosität unabhängigen Schallgeschwindigkeit c_0 ausgegangen. Ein anschauliches Maß für den Vergleich der theoretischen mit der numerischen Dispersionsrelation ist das Verhältnis c_{norm} von tatsächlicher Phasengeschwindigkeit der Schallwellen im numerischen Modell c_{LBM} zum theoretischen Wert c_0

$$c_{norm} = \frac{c_{LBM}}{c_0}$$

Die normierte Abweichung der Phasengeschwindigkeit vom theoretischen Wert c_0 ist demnach

$$\Delta c_{norm} = c_{norm} - 1$$

Die nachfolgend diskutierten Ergebnisse wurden berechnet, in dem für festgelegte Werte des Wellenvektors die Eigenwerte aus Gl. 3.10 bestimmt wurden. Dieses Verfahren ist äquivalent mit einer Situation, in der eine Quelle bezüglich des Mediums ruht, bzw. sich gegebenenfalls mit der mittleren Geschwindigkeit des Fluides bewegt. Ein ruhender Beobachter wird daher eine entsprechend der Relativgeschwindigkeit verschobene Frequenz messen. Löst man die Gl. 3.10 für eine Viskosität von $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ numerisch, so ergibt sich das in Abb. 3.1 gezeigte Resultat. Für kleine Wellenzahlen ist Δc_{norm} kleiner als 1%. Etwa bei $k = 0,65$ unterschreitet der Wert von c_{norm} 0,99, was einem Fehler von mehr als 1% in der Phasengeschwindigkeit entspricht. Bis zu diesem Wert ist die Abweichung der Phasengeschwindigkeit nahezu unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Wellen. Erst bei größeren Wellenzahlen wird der Fehler der Phasengeschwindigkeit anisotrop, wie in Abb. 3.2 zu sehen ist: Für parallel zum Gitter laufende Wellen ist die Abweichung der Phasengeschwindigkeit am kleinsten, für die 45° Laufrichtung bei $k = 1$ ist der Fehler ca. 0,8% größer als für die 0° Richtung.

Das Lattice-Boltzmann-Verfahren reproduziert den Effekt der Konvektion von Schallwellen in einer uniformen Grundströmung. Für die Berechnung der diesbezüglichen Eigenschaften muss die Gleichgewichtsverteilungsfunktion f_i^{eq} in Gl. (3.8) mit der zu untersuchenden Grundströmungsgeschwindigkeit berechnet werden. Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen den Fehler der Phasengeschwindigkeit für eine Grundströmung mit $Ma = 0,1$ parallel zur x -Achse bzw. 45° dazu und $Ma = 0,141$. Das generelle Bild ändert sich wenig im Vergleich zum Fall ohne Grundströmung, allerdings ergibt sich eine geringe Anisotropie. Stromaufwärts laufende Wellen zeigen eine kleinere Abweichung der Phasengeschwindigkeit vom theoretischen Wert als stromab laufende Wellen. Dies gilt auch, wenn die Strömungsrichtung in 45° zu den Gitterachsen liegt. Die Ursache für diesen Effekt ist vermutlich darin zu finden, dass die zeitliche Auflösung für stromaufwärts laufende Wellen feiner ist: Da sich die Quelle mit der Strömung bewegt, sinkt für einen stromauf ruhenden Beobachter die Frequenz, was mit einer feineren zeitlichen Abtastung äquivalent ist. Die Verteilung des Fehlers Δc_{norm} hängt vom Winkel ab, den die Gitterachsen mit der Strömungsrichtung einschließen, allerdings bleibt der Fehler so klein, dass dies praktisch keine Bedeutung haben sollte.

Für Lattice-Boltzmann-Verfahren kann der zu erwartende Dämpfungsexponent aus Gl. (3.6) berechnet werden, wobei zu berücksichtigen ist, dass bei den LBGK-Verfahren die zweite Viskosität gemäß Gl. (2.22) $\nu' = 2/3\nu$ ist. Damit ergibt sich der zu erwartende Dämpfungsexponent

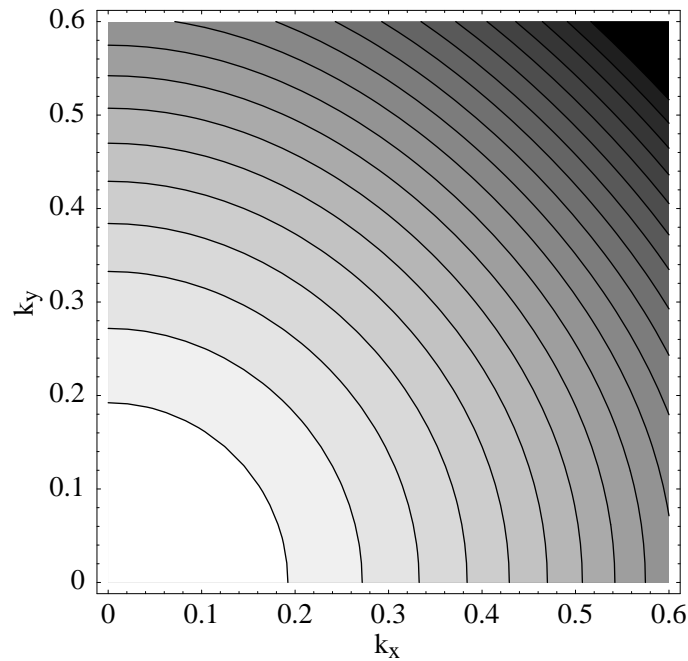


Abbildung 3.1: Normierte Phasengeschwindigkeit der Schallwellen c_{norm} in einem D2Q9-Lattice-Boltzmann-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$, $\Delta t = \Delta x/\sqrt{3}c_0$. Bei $\vec{k} = \{0, 0\}$ ist $c_{norm} = 1$, jede Isolinie entspricht einer Abnahme der Phasengeschwindigkeit um 0,1 %.

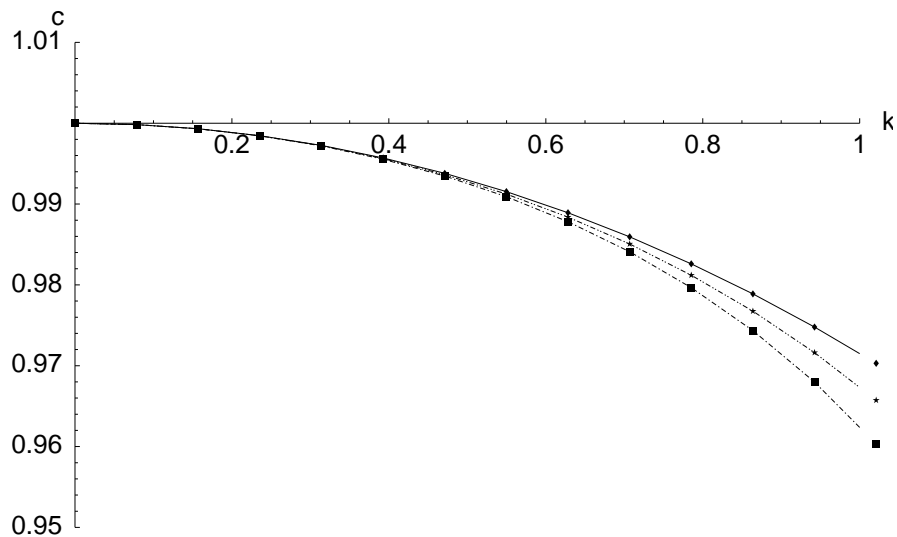


Abbildung 3.2: Normierte Phasengeschwindigkeit der Schallwellen c_{norm} in einem D2Q9-Lattice-Boltzmann-Modell als Funktion der Wellenzahl k für parallel zu einer Gitterachse laufende Wellen (\diamond), und für Laufrichtungswinkel von $22,5^\circ$ (\star) und 45° (\blacksquare). Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$.

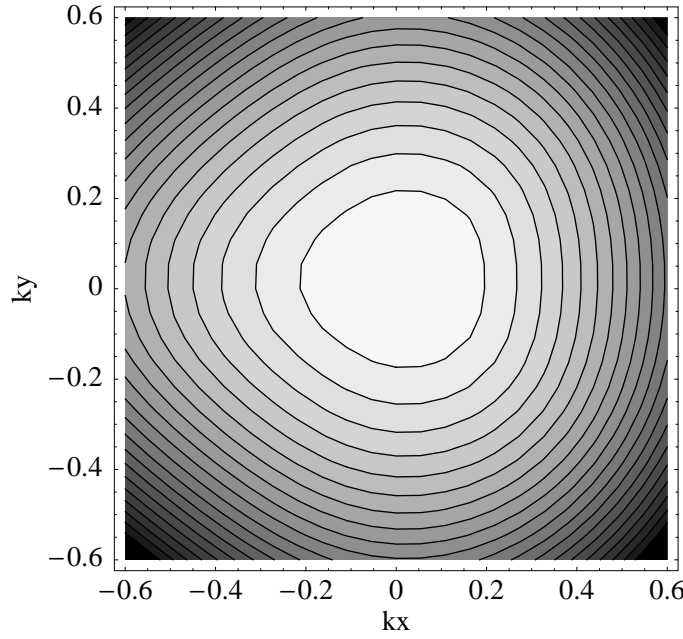


Abbildung 3.3: Phasengeschwindigkeitsfehler für Schallwellen Δc_{norm} in einem D2Q9-Lattice-Boltzmann-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$ bei einer Grundströmung mit $Ma = 0.1$ parallel zur x -Achse. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$. Bei $\vec{k} = \{0,0\}$ ist $\Delta c_{norm} = 0$, jede Isolinie entspricht einer Abnahme der Phasengeschwindigkeit um 0,1 %.

zu $\alpha = k^2\nu$. Die Abbildungen 3.5–3.7 zeigen den numerischen Wert von ν' bezogen auf den Wert bei $k = 0$ als Funktion der Wellenlänge und Laufrichtung von Schallwellen, wobei ein Wert von $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ bei $k = 0$ vorgegeben war.

Für ein ruhendes Medium steigt die Viskosität im betrachteten Wellenzahlbereich um maximal 13% an. Die zugrundeliegende Gitterstruktur zeichnet sich deutlich sichtbar in der Verteilung des Fehlers ab: Für parallel zu den Achsen laufende Wellen ist der Fehler unabhängig von der Wellenzahl unter 1%, während er in den anderen Richtungen jeweils mit zunehmender Wellenzahl anwächst. Bei einer Grundströmung parallel zu einer Gitterachse mit $Ma = 0,1$ kommt es zu einer Abweichung der Viskosität in Richtung zu geringer Dämpfung, allerdings beträgt die Abweichung des Exponenten nur maximal -2%. Für eine Grundströmung parallel zu einer Winkelhalbierenden (Abb. 3.7) mit $Ma = 0.141$ vergrößert sich der Fehler wiederum auf maximal 12% bzw. minimal -3%. Insgesamt gesehen sind jedoch alle hier beobachteten Abweichungen in der Dämpfung so klein, dass sie in der praktischen Anwendung bei der Simulation von Schallwellen keine Rolle spielen.

3.4 Dispersion und Dissipation von Schallwellen im 3D-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell

Für die Beschreibung der Dispersionsrelation im dreidimensionalen D3Q19-Modell werden zunächst folgende Koordinaten eingeführt:

$$x = r \cos(\theta) \cos(\phi)$$

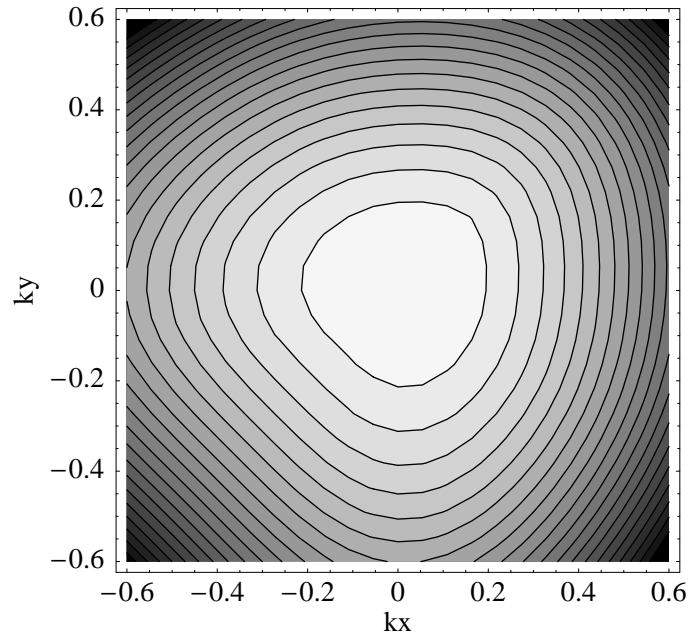


Abbildung 3.4: Phasengeschwindigkeitsfehler für Schallwellen Δc_{norm} in einem D2Q9-Lattice-Boltzmann-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$ bei einer Grundströmung mit $Ma = 0.141$ in 45° Richtung zur x -Achse. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$. Bei $\vec{k} = \{0, 0\}$ ist $\Delta c_{norm} = 0$, jede Isolinie entspricht einer Abnahme der Phasengeschwindigkeit um 0,1 %.

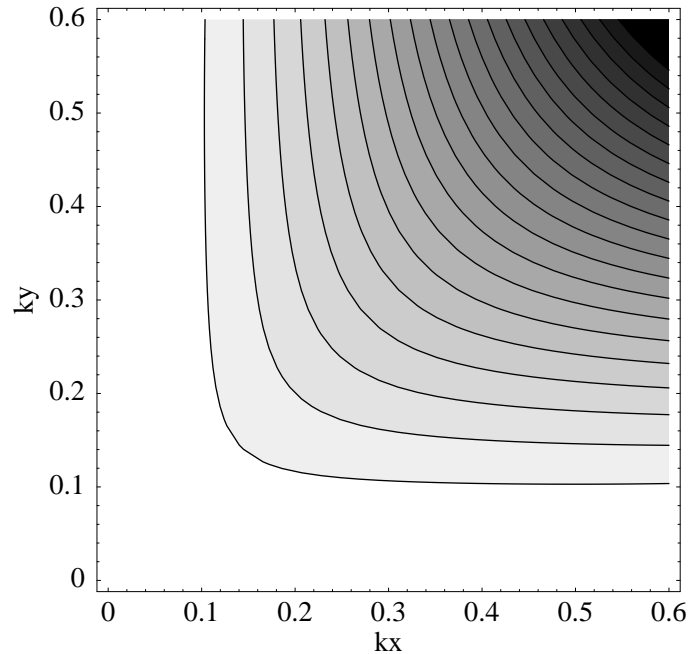


Abbildung 3.5: Effektive Viskosität ν' bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D2Q9-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$. Jede Isolinie entspricht einer Vergrößerung der Viskosität um 0,5 %.

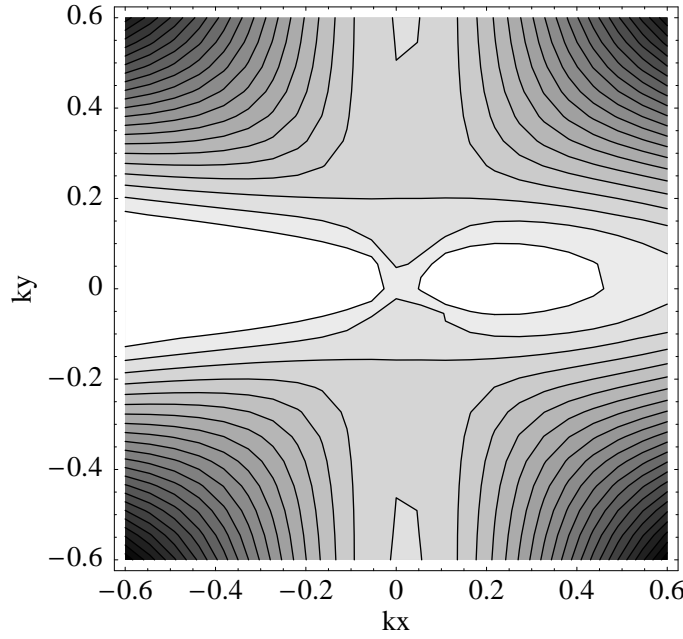


Abbildung 3.6: Effektive Viskosität ν' bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D2Q9-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$ bei einer Grundströmung mit $Ma = 0.1$ parallel zur x -Achse. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$. Jede Isolinie entspricht einer Vergrößerung der Viskosität um 0,5 %.

$$\begin{aligned} y &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ z &= r \sin(\phi) \end{aligned}$$

Abb. 3.8 zeigt die normierte Phasengeschwindigkeit c_{norm} bei einer Wellenlänge von 10 Gitterweiten als Funktion der Laufrichtung. Der maximale Fehler beträgt 1,2% und wird erreicht von Wellen, die parallel zur einen und 45° zu den beiden anderen Koordinatenachsen laufen. Der minimale Fehler ist mit 1,125% praktisch genauso groß, damit ist auch beim D3Q19-Modell der Phasenfehler bei dieser Wellenlänge annähernd isotrop.

In drei Dimensionen wird die Zahl der möglichen Kombinationen von Laufrichtung der Schallwellen und Grundströmungsgeschwindigkeiten sehr groß, daher werden nur einzelne Kombinationen untersucht. Aufgrund der bisher gefunden Ergebnisse und der praktischen Erfahrung mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren wird jedoch vermutet, dass sich die Fehler auf nicht untersuchte Kombinationen interpolieren lassen.

Abb. 3.9 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung für Schallwellen mit einer Wellenlänge von $50 \Delta x$ bei einer homogenen Grundströmung mit der Geschwindigkeit $v_0 = c_0/10$. Wie erwartet breiten sich die Wellen entgegen bzw. mit der Strömung um 10% schneller bzw. langsamer aus. Für Ausbreitungsrichtungen senkrecht zur Grundströmung ist die Phasengeschwindigkeit unbeeinflusst. Der normierte Fehler der Phasengeschwindigkeit ist in Abb. 3.10 dargestellt. Zunächst ist festzustellen, dass für sämtliche Laufrichtungen $\Delta c_{norm} < 0$, d.h. die tatsächliche Phasengeschwindigkeit geringfügig kleiner als die theoretisch erwartete ist. Außerdem ist sichtbar, dass der Fehler nicht mehr im gleichen Maße isotrop ist, wie es für den Fall ohne Grund-

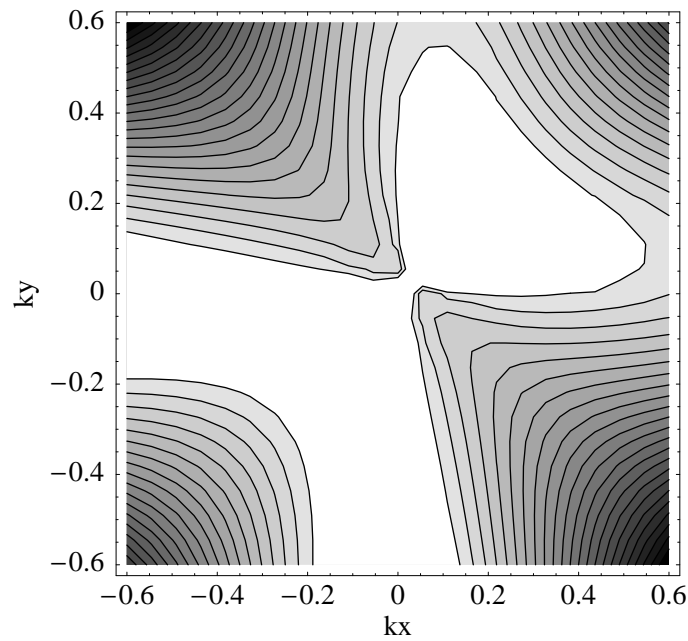


Abbildung 3.7: Effektive Viskosität ν' bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D2Q9-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion des Wellenvektors $\{k_x, k_y\}$ bei einer Grundströmung mit $Ma = 0.141$ in 45° Richtung zur x -Achse. Der Betrag des Wellenvektors ist mit der Gitterweite Δx skaliert: $k = 2\pi\Delta x/\lambda$. Jede Isolinie entspricht einer Vergrößerung der Viskosität um 0,5 %.

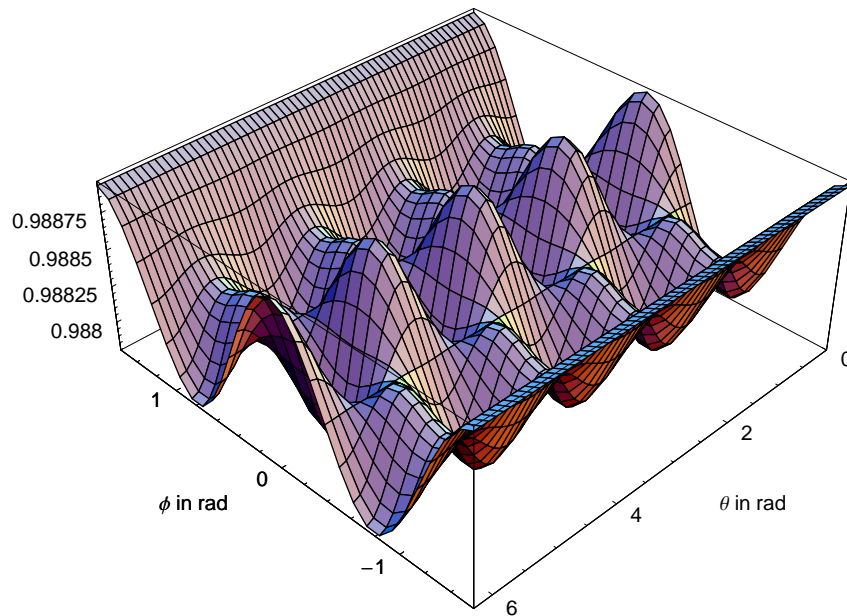


Abbildung 3.8: Normierte Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen mit einer Wellenlänge von $10\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Boltzmann-Modellen als Funktion der Laufrichtung

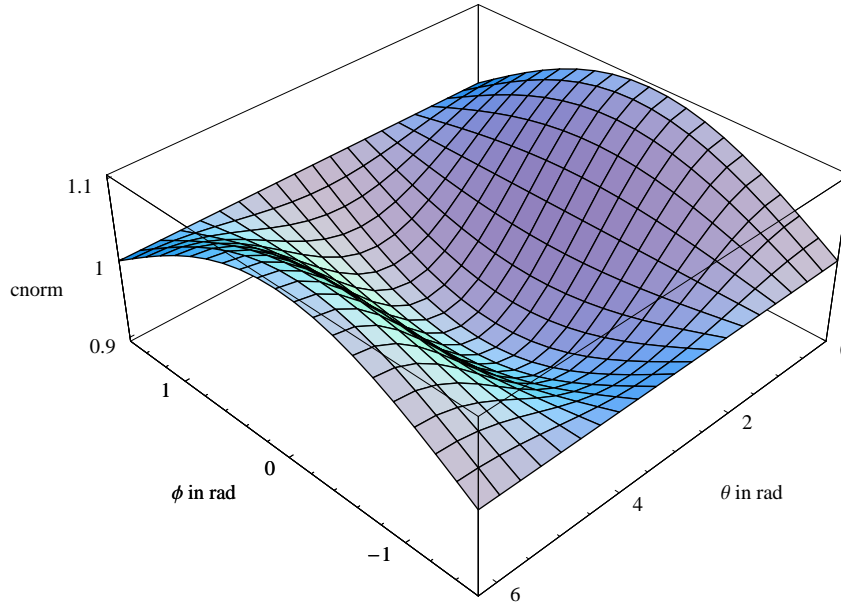


Abbildung 3.9: Normierte Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen mit einer Wellenlänge von $50\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Boltzmann-Modellen als Funktion der Laufrichtung bei einer Grundströmungsgeschwindigkeit $Ma = 0,1$ in x -Richtung.

strömung zu beobachten war. Für eine Wellenlänge von $10\Delta x$ (siehe Abb. 3.11) hat sich der Fehler stark vergrößert. Die maximale Abweichung von Δc_{norm} ist mit -1.42% ca. 24% größer als die mittlere Abweichung von -1.15% (bei $\lambda = 10\Delta x$), d.h. die Grundströmung hat offenbar negative Auswirkungen auf die Isotropie der Phasengeschwindigkeit. In jedem Fall treten die größten Abweichungen auf, wenn die Schallwellen in gleiche Richtung wie die Grundströmung laufen, entsprechend sind die Fehler am kleinsten, wenn die Schallwellen entgegengesetzt zur Grundströmung laufen.

Abb. 3.12 und 3.13 zeigen den normierten Fehler der Phasengeschwindigkeit Δc_{norm} bei den Grundströmungsgeschwindigkeiten $\vec{u} = c_0/10\{1, 1, 0\}$ und $\vec{u} = c_0/10\{1, 1, 1\}$. Die Richtungsänderung der Grundströmung von $\{1, 0, 0\}$ nach $\{1, 1, 0\}$ zeigt die Abhängigkeit der Fehlerstruktur vom zugrunde liegenden Gitter: Die größten bzw. kleinsten Fehler treten wiederum für Schallwellen auf, die in Richtung der Gitterachsen laufen, wobei wiederum stromauf laufende Schallwellen eine geringere Abweichung der Phasengeschwindigkeit zeigen als stromab laufende Schallwellen. Für Schallwellen, die parallel zur Strömung laufen, ergibt sich in diesem Fall ein lokales Minimum des Fehlers. Bei einer Grundströmung parallel zur Raumdiagonalen des Einheitswürfels im kartesischen Koordinatensystem $\{1, 1, 1\}$ wiederholt sich diese Beobachtung: Die größten Fehler Δc_{norm} treten bei Schallwellen mit Laufrichtung parallel zu den Gitterachsen auf. Die mögliche Ursache wurde schon bei der Diskussion der 2D Ergebnisse genannt. Es ist bemerkenswert, dass der Fehler der Phasengeschwindigkeit für die hier gezeigten Fälle immer in der gleichen Größenordnung bleibt, obwohl die Beträge der Grundströmungsgeschwindigkeit mit $c_0/10$, $\sqrt{2}c_0/10$ und $\sqrt{3}c_0/10$ deutlich unterschiedlich sind.

Die Abbildungen 3.14–3.17 zeigen den effektiven Wert der Viskosität ν' bezogen auf den Wert bei $k = 0$ als Funktion der Wellenlaufrichtung bei verschiedenen Grundströmungen und einer Wellenlänge von $10\Delta x$. Wiederum zeigt sich eine Anisotropie im Dämpfungsverhalten, die

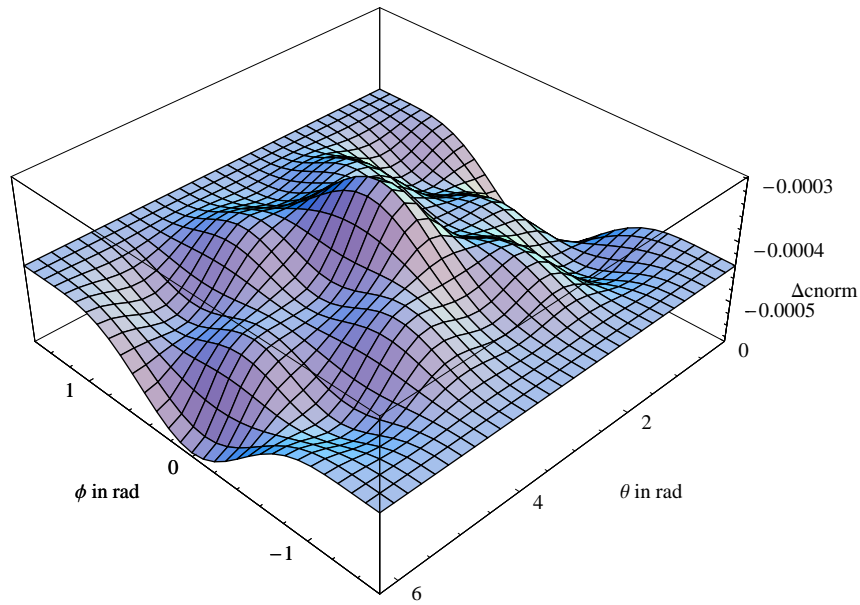


Abbildung 3.10: Fehler der normierten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen Δc_{norm} mit einer Wellenlänge von $50\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modellen als Funktion der Laufrichtung bei einer Grundströmungsgeschwindigkeit $Ma = 0, 1$ in x -Richtung.

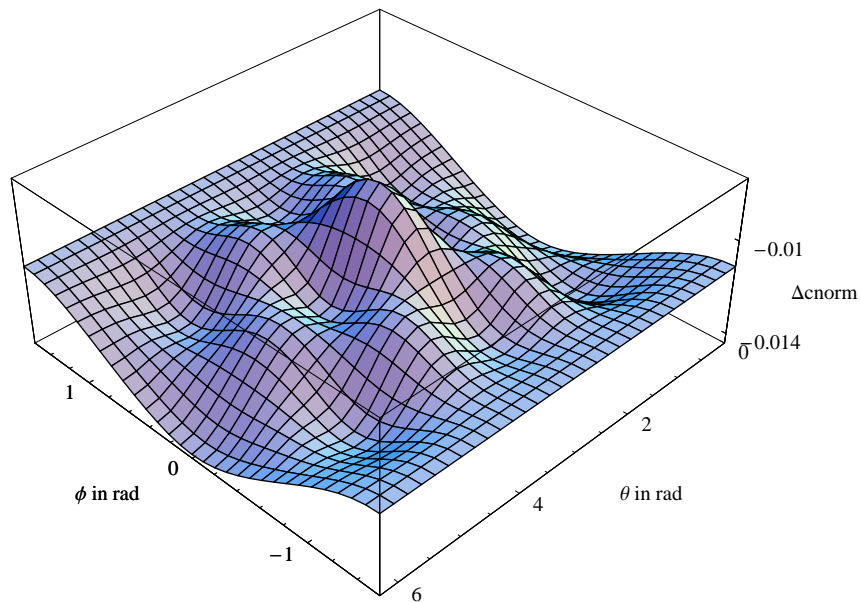


Abbildung 3.11: Fehler der normierten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen Δc_{norm} mit einer Wellenlänge von $10\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modellen als Funktion der Laufrichtung bei einer Grundströmungsgeschwindigkeit $Ma = 0, 1$ in x -Richtung.

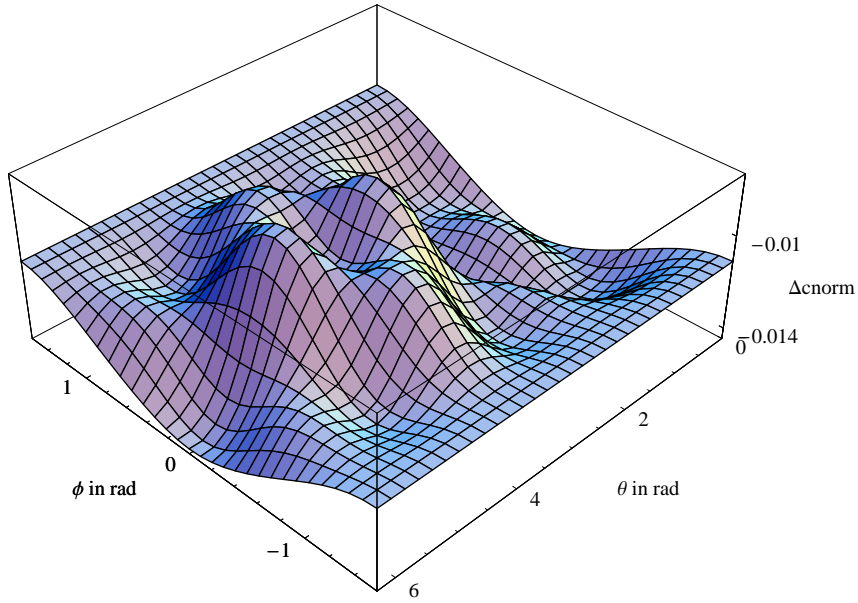


Abbildung 3.12: Fehler der normierten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen Δc_{norm} mit einer Wellenlänge von $10\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modellen als Funktion der Laufrichtung bei einer Grundströmungsgeschwindigkeit $\vec{u} = \{1, 1, 0\} c_0/10$.

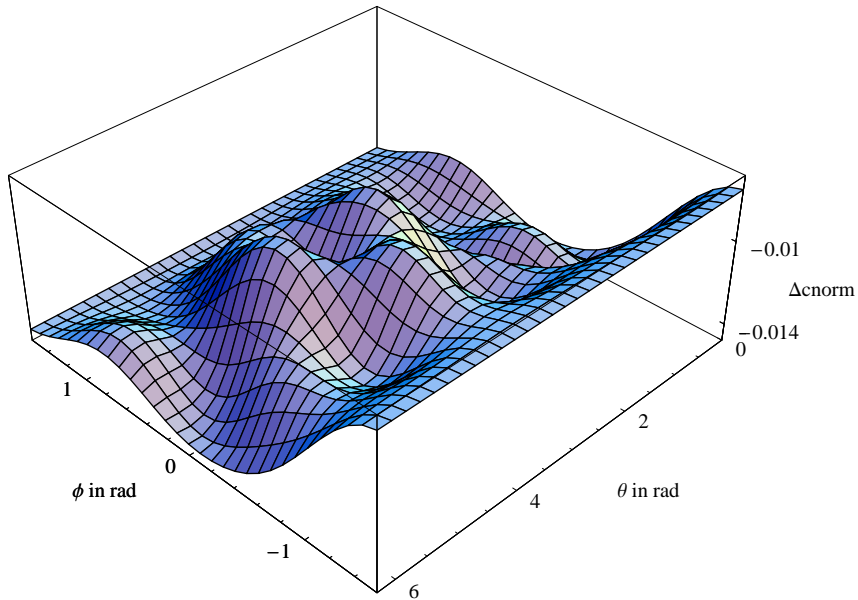


Abbildung 3.13: Fehler der normierten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen Δc_{norm} mit einer Wellenlänge von $10\Delta x$ in D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modellen als Funktion der Laufrichtung bei einer Grundströmungsgeschwindigkeit $\vec{u} = \{1, 1, 1\} c_0/10$.

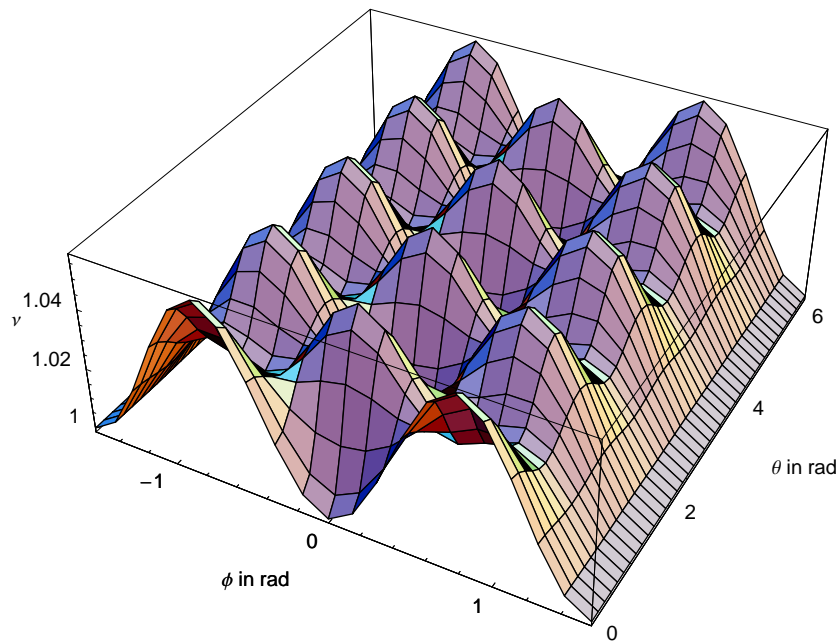


Abbildung 3.14: Effektive Viskosität bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion der Wellenaufrichtung in ruhenden Fluid bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$.

bis zu 6% unterschiedliche Dämpfungsexponenten ausmacht. Der Fehler wird mit zunehmender Wellenlänge kleiner, bei $\lambda = 50\Delta x$ erhält man die praktisch gleichen Verläufe wie in Abb. 3.14, jedoch derart skaliert, dass der maximale Fehler nur noch 2% beträgt. Wie auch im zweidimensionalen Fall sind die Dämpfungen so klein, dass sie in der Praxis der strömungsakustischen Simulation vernachlässigt werden können.

Die Abbildungen 3.15–3.17 zeigen, dass eine Grundströmung zwar Einfluss auf die Abweichung der Viskosität vom eingestellten Wert hat, der Fehler aber durch eine Grundströmung nicht wesentlich vergrößert wird.

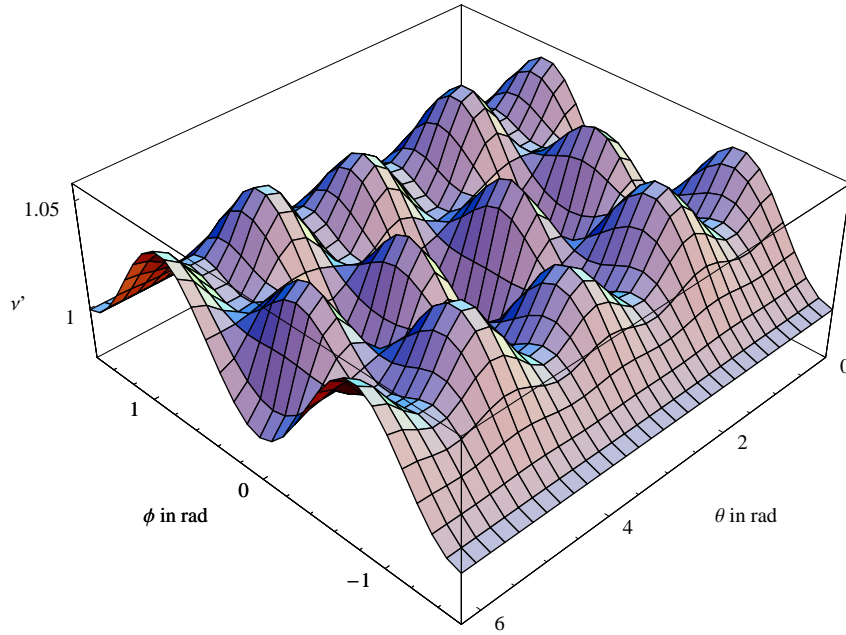


Abbildung 3.15: Effektive Viskosität bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion der Wellenaufrichtung in einer Grundströmung in x -Richtung mit $Ma = 0,1$ bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$.

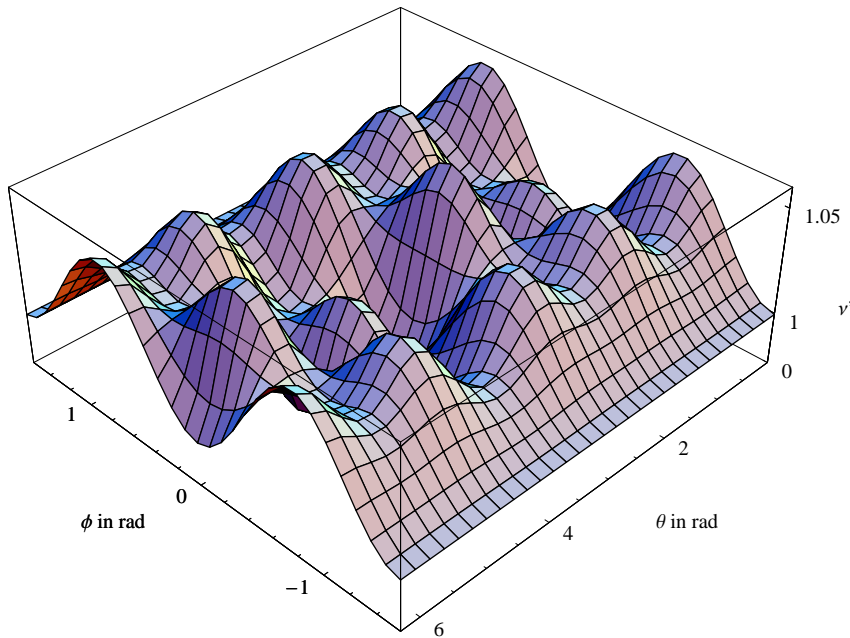


Abbildung 3.16: Effektive Viskosität bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion der Wellenaufrichtung in einer Grundströmung in $\{1, 1, 0\}$ -Richtung mit $Ma = 0,141$ bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$.

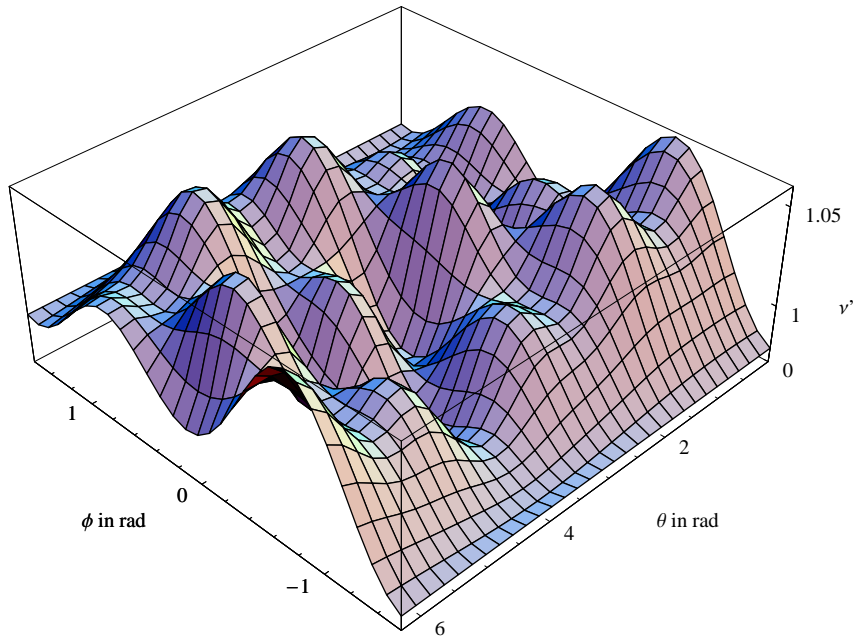


Abbildung 3.17: Effektive Viskosität bezogen auf den Wert bei $k = 0$ für Schallwellen in einem D3Q19-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell als Funktion der Wellenaufrichtung in einer Grundströmung in $\{1, 1, 1\}$ -Richtung mit $Ma = 0,17$ bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$.

3.5 Dispersion und Dissipation von Schallwellen in Multiple-Relaxation-Time-Modellen

Im Vergleich mit den LBGK-Modellen kommen für Betrachtung von Modellfehlern neben den Parametern Wellenzahl, Laufrichtung und Grundströmungsgeschwindigkeit noch die relativen Werte der verschiedenen Relaxationskonstanten hinzu. Da sich jedoch die wesentlichen Eigenschaften der LBGK-Modelle auch bei den MRT-Modellen nachweisen lassen, soll im Folgenden nur auf die Unterschiede von LBGK- und MRT-Modellen eingegangen werden.

Lallemand und Luo nutzen in [35] für ein zweidimensionales Modell folgenden Satz von Relaxationsparametern: $s_2 = 1,64$, $s_3 = 1,54$, $s_5 = s_7 = 1,9$, $s_8 = s_9 = 1,99$, was bei einer ersten Viskosität ν von $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ und Schallgeschwindigkeit von 340 m/s einer Auflösung von $\Delta x = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ entspricht. Die Abbildung 3.18 zeigt die mit diesem Parametersatz errechneten Werte für den Fehler der Phasengeschwindigkeit, die erste und die zweite Viskosität, jeweils bezogen auf den eingestellten Wert bei $k = 0$. Bei diesen Rechnungen wurde die Grundströmung gleich Null gesetzt. Abbildung 3.18a zeigt den Fehler der Phasengeschwindigkeit von Schallwellen in Abhängigkeit von der Wellenaufrichtung und Wellenzahl. Offenbar ist die Dispersion gegenüber dem entsprechenden LBGK-Modell kaum verändert. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 3.18b die erste Viskosität ν . Abbildung 3.18c zeigt die zweite Viskosität ν' , die insgesamt etwa um den Faktor 23 größer ist als die erste Viskosität. Dieses Verhalten ist in Anbetracht der Wahl der Relaxationsparameter nicht anders zu erwarten, da $s_2 = s_8 = s_9$ sein müsste, um $\nu = \nu'$ zu erhalten. Abbildung 3.18d zeigt das Ergebnis mit $s_2 = s_8 = s_9$. Wie erwartet ist $\nu' \approx \nu|_{k=0}$. Allerdings wird jetzt ν' bei großen $|k_x| = |k_y|$ negativ, d.h. das Verfahren wird instabil. In dieser Form ist das Modell offensichtlich nicht brauchbar, daher wurde versucht,

durch Modifikation anderer Parameter das Modell wiederum zu stabilisieren. Abbildung 3.18e zeigt das Resultat für die zweite Viskosität, nachdem $s_3 = 1,9$ (statt 1,54) gesetzt wurde. Mit dieser Wahl wird die zweite Viskosität im betrachteten Bereich nicht mehr negativ. Somit zeigt sich eine Einschränkung des MRT-Modells im Vergleich zum LBGK-Modell: Prinzipiell erlaubt das MRT-Modell zwar die freie Festlegung der zweiten Viskosität, eine deutliche Verbesserung der Stabilität wird aber offenbar nur erreicht, wenn die zweite Viskosität erheblich größer als die erste Viskosität gewählt wird. Wählt man dagegen die zweite Viskosität gleich der ersten, so erzwingen die Stabilitätsanforderungen eine Wahl der übrigen Relaxationsparameter in der Art, dass das resultierende Modell vom normalen LBGK-Modell nicht mehr sehr weit entfernt ist.

Die Ergebnisse für ein dreidimensionales Modell sind in Abb. 3.19 dargestellt. Die Transportkoeffizienten wurden bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$ in einem ruhenden Medium berechnet. Die Ergebnisse in Abb. 3.19a–c sind mit den Relaxationsparametern $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,99$ berechnet, während die Resultate in Abb. 3.19d–f mit $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,8$ zustande kommen. Bei allen Rechnungen wurden $s_1 = s_9 = 1.99695$ gesetzt, was einer Viskosität von $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ bei einer Auflösung von $\Delta x = 10^{-4} \text{m}$ entspricht. Auch hier zeigt sich wie schon im zweidimensionalen Fall das gleiche Problem: Die Parameter s_3, s_5, s_{11}, s_{17} haben mit zunehmender Wellenzahl einen Einfluss auf die Werte der Viskosität. So ist der Fehler der Phasengeschwindigkeit zwar für beide s -Parametersätze gleich, jedoch zeigen die Anisotropiefehler der Viskositäten deutliche Unterschiede: In Abb. 3.19b ist zu erkennen, dass die maximale Abweichung der ersten Viskosität etwa 3% beträgt, während die erste Viskosität bei $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,8$ für Wellenvektoren parallel zur Raumdiagonalen um 20% nach unten abweicht (Abb. 3.19e). Für die zweite Viskosität fällt der Vergleich noch deutlicher aus, hier stehen ca. 4% Fehler bei $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,99$ einem maximalen Fehler von mehr als 30% bei $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,8$ gegenüber (Abb. 3.19c und f). Die Anisotropien der Viskositäten werden kleiner, je näher die Parameter s_3, s_5, s_{11}, s_{17} den bei $|\vec{k}| = 0$ wesentlichen Parametern s_1, s_9 kommen.

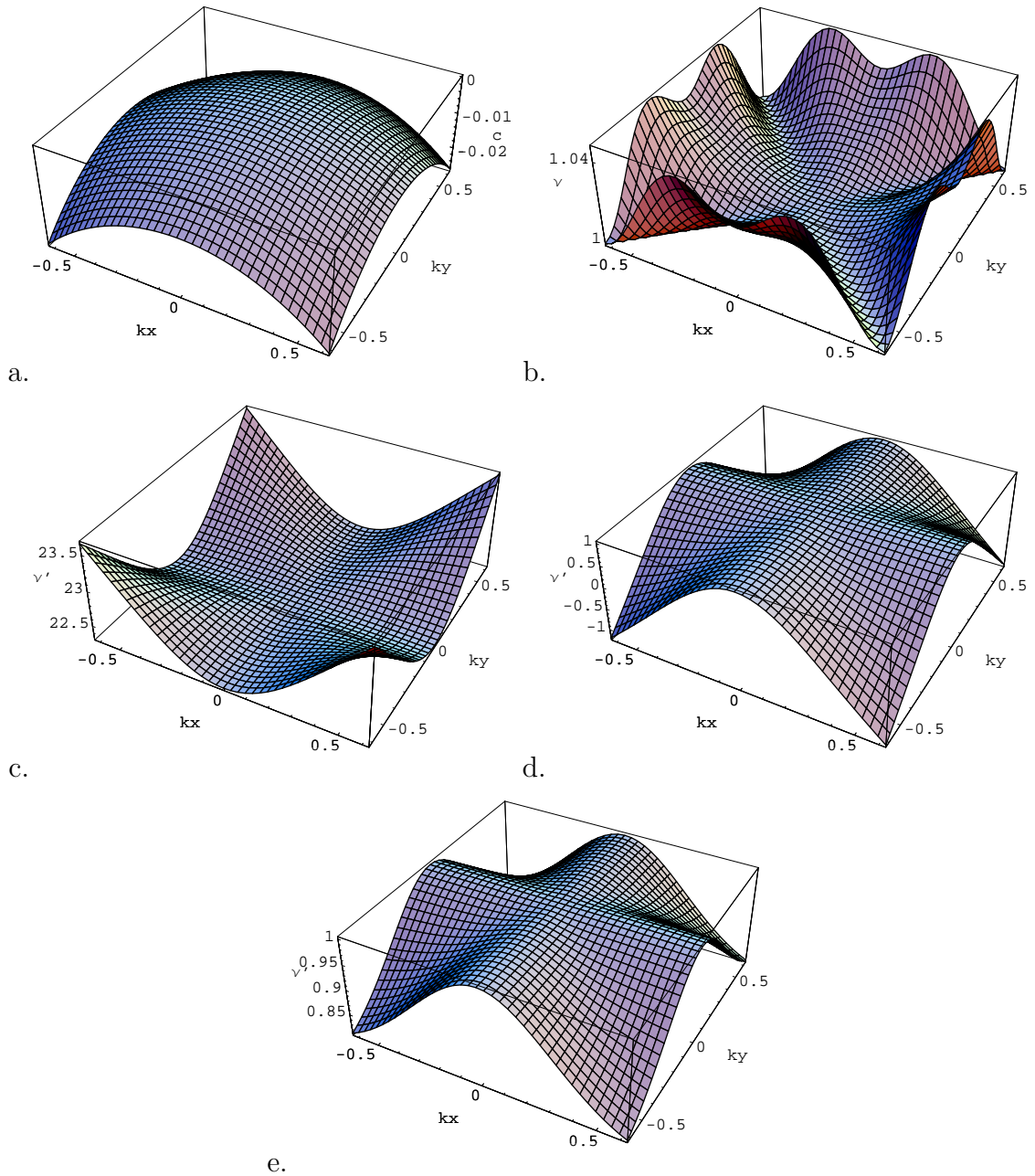


Abbildung 3.18: Fehler der Transportkoeffizienten im zweidimensionalen Multiple-Relaxation-Time-Modell in Abhängigkeit vom Wellenvektor (k_x, k_y) bezogen auf den Wert bei $|\vec{k}| = 0$, a: Fehler der Phasengeschwindigkeit, b: Erste Viskosität, c: Zweite Viskosität mit allen Relaxationsparameter nach Lallemand und Luo [35], d: Wie c., aber mit $s_2 = 1,99$, e: Wie c., aber mit $s_2 = 1,99$ und $s_3 = 1,9$. Alle Werte sind bezogen auf den eingestellten Wert bei $k = 0$.

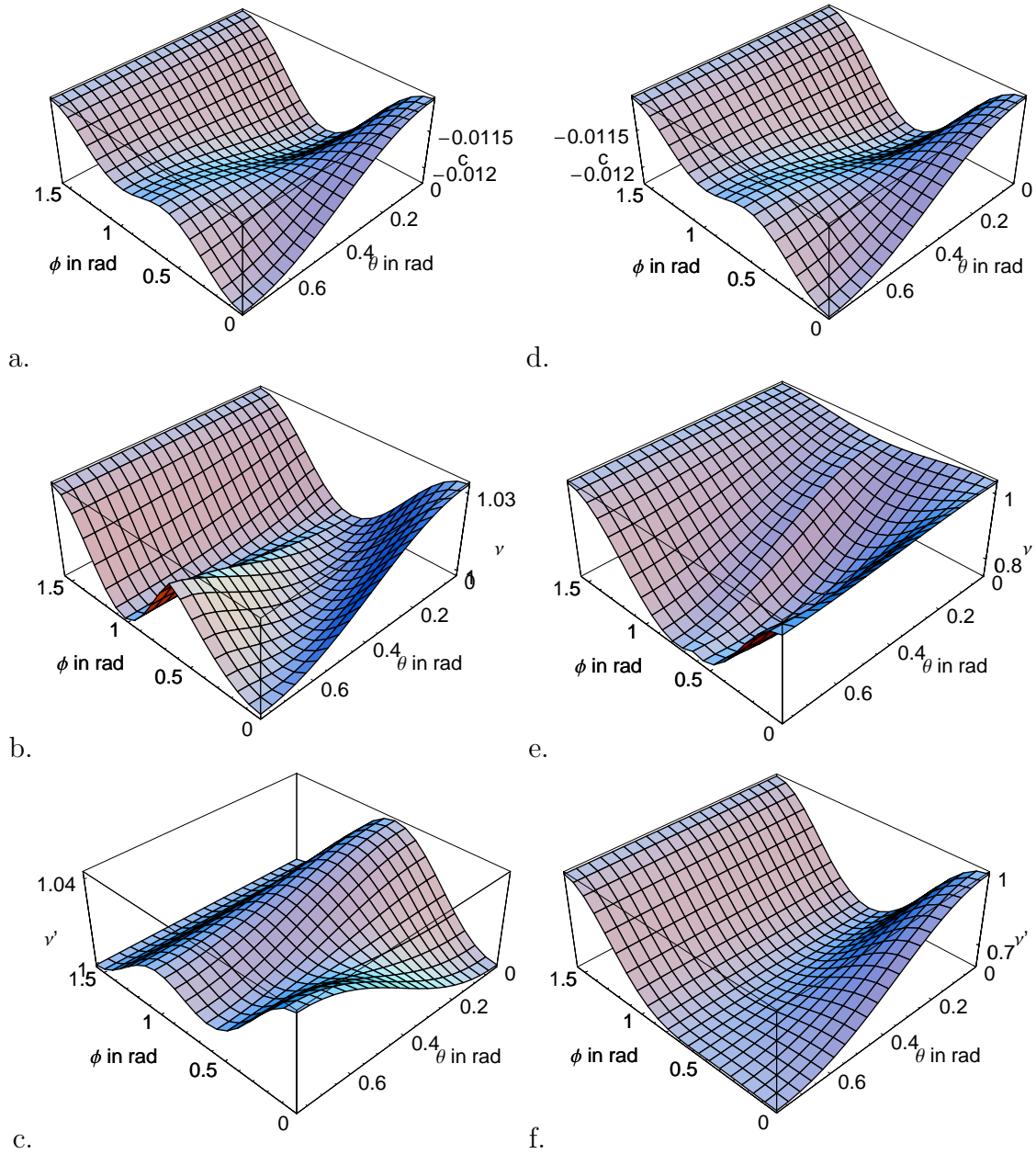


Abbildung 3.19: Fehler der Transportkoeffizienten im dreidimensionalen Multiple-Relaxation-Time-Modell in Abhängigkeit von der Laufrichtung bei einer Wellenlänge von $10\Delta x$ bezogen auf den eingestellten Wert bei $|\vec{k}| = 0$, a: Fehler der Phasengeschwindigkeit, b: Erste Viskosität, c: Zweite Viskosität, d-f: Wie a-c., aber mit $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,8$ statt $s_3 = s_5 = s_{11} = s_{17} = 1,99$

Kapitel 4

Anwendungen

Das Lattice-Boltzmann-Verfahren wurde in dieser Arbeit auf verschiedene Probleme angewendet, um seine Tauglichkeit zur Lösung technisch relevanter Probleme zu demonstrieren. Dabei wurden solche Testfälle ausgesucht, die zwar aufgrund ihrer einfachen Geometrie mit vergleichsweise geringem rechnerischen Aufwand beherrschbar sind, die aber auch in engem Zusammenhang mit konkreten Problemen stehen. Der erste Testfall bezieht sich auf die Schallerzeugung an der Vorderkante einer Platte. Hier wird durch eine instationäre Anströmung eine wechselnde Last auf der Platte erzeugt, die zu Schallabstrahlung führt. Dieser Schallerzeugungsmechanismus ist bei vielen technischen Anwendungen von großer Bedeutung: Bei Hubschraubern, Ventilatoren usw. resultiert i.A. ein erheblicher Teil des erzeugten Lärms aus der Wechselwirkung der Rotorblattvorderkante mit instationären Störungen der Anströmung.

Der zweite Testfall ist ein überströmter Helmholtzresonator. Solche Strukturen findet man in der Technik z.B. bei Automobilen: Das geöffnete Schiebedach kann bei manchen Fahrzeugen bei einer bestimmten Geschwindigkeit zu sehr starken Druckschwankungen in der Fahrgastzelle bei tiefen Frequenzen (um 20 Hz), dem sogenannten „Schiebedachwummern“ führen. Die hier betrachtete Geometrie wurde jedoch aus der Form eines Hohlraumes unter einem Türschlitz abgeleitet, der unter Umständen einen Pfeifton erzeugt. In beiden Fällen ist der Mechanismus der Schallerzeugung der gleiche.

Der dritte Testfall wurde als vereinfachtes Modell einer Verstrebung an einem Fahrzeug mit strömungsgünstigem Profil konzipiert. Es handelt sich dabei um einen Halbzylinder, an dessen flacher Rückseite ein Dreikant angebracht ist. Bei dieser Struktur ist interessant, dass sowohl mit breitbandigen als auch mit tonalen Komponenten im abstrahlten Schall zu rechnen ist.

4.1 Vorderkantenlärm

Die Schallerzeugung bei der Wechselwirkung von instationären Strukturen in der Anströmung mit der Vorderkante einer Platte wurde in vielen Varianten untersucht (siehe z.B. [12, 10]). Theoretisch kann dieser Effekt durch die Theorie von Lighthill mit den Erweiterungen durch Curle, Ffowcs Williams und Hawkings oder Howe beschrieben werden. Die zentrale Idee dabei ist immer, aus den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls eine inhomogene Wellengleichung abzuleiten. Die linke Seite beschreibt die Ausbreitung von Schall in einem ansonsten meist ruhend angenommenen Fluid während auf der rechten Seite Quellterme auftauchen, die von dem als bekannt vorausgesetzten Strömungsfeld in Quellbereich abhängen.

Für numerische Untersuchungen kommen mehrere Ansätze in Frage: Zum einen können die Navier-Stokesgleichungen direkt gelöst werden, was aber für eine Bestimmung des akustischen

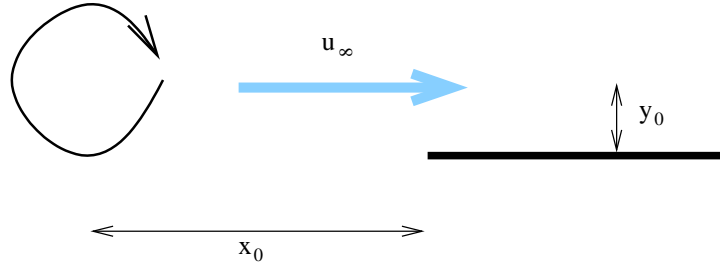


Abbildung 4.1: Skizze der Simulation der Wechselwirkung eines einzelnen Wirbels mit der Vorderkante einer halbunendlichen Platte.

Fernfeldes nicht praktikabel ist, weil der Aufwand zur Diskretisierung des Schallfeldes zu groß ist und weil viele Verfahren eine zu starke Dissipation von Schallwellen aufweisen. Daher wird oft die direkte Simulation auf ein kleines Gebiet beschränkt. In diesem Gebiet wird die Kontrollfläche für ein Randelemente-Verfahren nach Kirchhoff platziert, um auf diese Weise das Fernfeld zu berechnen. Eine andere oft genutzte Möglichkeit besteht darin, die Ergebnisse der Strömungssimulation im Nahfeld in dem Quellmodell einer akustischen Analogie auszuwerten, mit deren Hilfe das Fernfeld berechnet wird.

In dieser Arbeit wird der Schalldruck der abgestrahlten Schallwelle einerseits in einer zweidimensionalen Rechnung direkt simuliert und andererseits werden die Ergebnisse zur Auswertung einer akustischen Analogie genutzt, wobei die Simulation der Strömung mit Hilfe des Lattice-Boltzmann-Verfahrens durchgeführt wird. Betrachtet wird jeweils ein einzelner Wirbel, der durch die mittlere Strömung auf die Vorderkante einer halbunendlichen Platte der Dicke Null zu treibt (Abb. 4.1). Die Strömungssimulation liefert einerseits die entstehende Schallwelle direkt, andererseits werden die simulierten Geschwindigkeitsfelder genutzt, um den Quellterm einer akustischen Analogie zu berechnen. Die Auswertung der akustischen Analogie liefert ebenfalls eine Beschreibung des strömungsmechanisch erzeugten Schalles, die mit dem direkt simulierten Ergebnis verglichen werden kann.

4.1.1 Abschätzung des Vorderkantengeräusches mit einer akustischen Analogie

Strömungsmechanisch erzeugter Schall kann mit Hilfe einer akustischen Analogie berechnet werden. Die bekannteste Analogie geht auf Lighthill zurück [39]. Das grundsätzliche Vorgehen ist, aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie eine inhomogene Wellengleichung abzuleiten, auf deren linker Seite der die Wellenausbreitung beschreibende Differentialoperator steht, während auf der rechten Seite die übrigen sich ergebenden Terme gesammelt werden, die dann als Quellterme interpretiert werden. Die Lighthill'sche Analogie lautet mit einigen Vereinfachungen für niedrige Mach-Zahlen [17, 30]

$$W c_0^2 (\rho - \rho_0) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho_0 v_\alpha v_\beta \quad (4.1)$$

mit dem linearen Wellenoperator

$$W = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Zusätzlich sind an den Berandungen des Fluides (z.B. feste Wände) entsprechende Randbedingungen einzuhalten. Diese Gleichung kann mit Hilfe der Green'schen Funktion gelöst werden

[17, 30]. Die Green'sche Funktion ist von der Geometrie und den Randbedingungen des speziellen Problems abhängig. In der Praxis ist es oft schwierig bzw. unmöglich, analytisch eine Green'sche Funktion zu finden, die Gl. (4.1) löst. Für die Green'sche Funktion $G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ gilt per Definition

$$WG(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \delta(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \quad (4.2)$$

wobei \vec{x}, t den Ort und den Zeitpunkt des Beobachters angibt, an dem die Druckschwankung berechnet werden soll. \vec{y}, τ ist der Ort der Quelle bzw. die „retardierte Zeit“. Die retardierte Zeit ist gegen die Beobachterzeit um die Laufzeit einer Schallwelle vom Quell- zum Beobachterort verschoben. Man erhält für das zweidimensionale Problem

$$\begin{aligned} c_0^2(\rho - \rho_0)(\vec{x}, t) &= \iint \delta(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) c_0^2(\rho - \rho_0)(\vec{y}, \tau) d^2\vec{y} d\tau \\ &= \iint WG(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) c_0^2(\rho - \rho_0)(\vec{y}, \tau) d^2\vec{y} d\tau \\ &= \iint G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) W c_0^2(\rho - \rho_0)(\vec{y}, \tau) d^2\vec{y} d\tau \\ &= \iint G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \rho_0 v_\alpha v_\beta(\vec{y}, \tau) d^2\vec{y} d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$= \iint \rho_0 v_\alpha v_\beta(\vec{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\beta} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) d^2\vec{y} d\tau \quad (4.4)$$

In der Form (4.4) ist erkennbar, dass die Ortsableitung der Green'schen Funktion im Faltungsintegral eine Art Wichtung der Quellgröße darstellt. Für das zweidimensionale Problem einer halbusendlichen Platte ist die Green'sche Funktion für das Fernfeld bekannt [30]. Befindet sich die Vorderkante am Koordinatenursprung und ist $|\vec{x}| \gg |\vec{y}|$, so gilt die Näherung

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) \approx \frac{1}{\pi|\vec{x}|} \sqrt{|\vec{x}|} \sin(\pi - \theta_x/2) \sqrt{|\vec{y}|} \sin(\pi - \theta_y/2) \delta(t - \tau - |\vec{x}|/c_0)$$

was zu

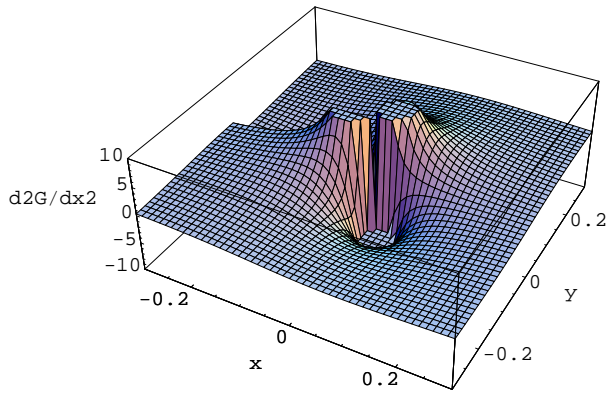
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) &\propto \frac{1}{4r^{7/2}} \left(2y_1 y_2 \cos(\pi - \frac{1}{2}\theta) - (y_1^2 - y_2^2) \sin(\pi - \frac{1}{2}\theta) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) &\propto \frac{1}{4r^{7/2}} \left(-2y_1 y_2 \sin(\pi - \frac{1}{2}\theta) - (y_1^2 - y_2^2) \cos(\pi - \frac{1}{2}\theta) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) &\propto \frac{1}{4r^{7/2}} \left(-2y_1 y_2 \cos(\pi - \frac{1}{2}\theta) + (y_1^2 - y_2^2) \sin(\pi - \frac{1}{2}\theta) \right) \end{aligned}$$

führt mit $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ und $\theta = \arctan(y_2/y_1)$. Die Wichtung der Quellfunktion in Gl. (4.4) ist also nur in der Nähe der Vorderkante signifikant größer als Null (siehe Abbildung 4.2). Allerdings ist diese Form der Berechnung des Integrals zunächst problematisch, da der Integrand bei $r = 0$ singular ist. Es lässt sich zwar zeigen, dass

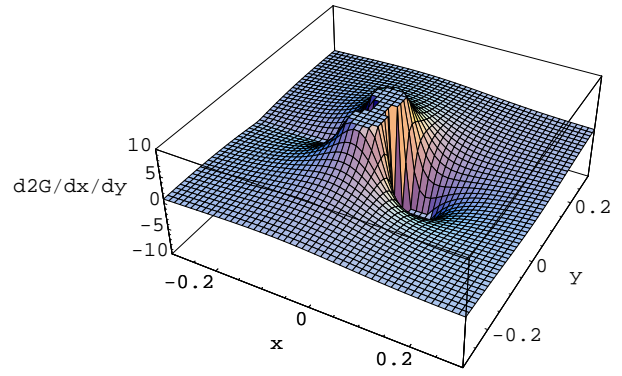
$$\iint \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) d^2\vec{y} = 0 \text{ für } i = 1, 2$$

weil der Integrand antisymmetrisch zur x -Achse ist.

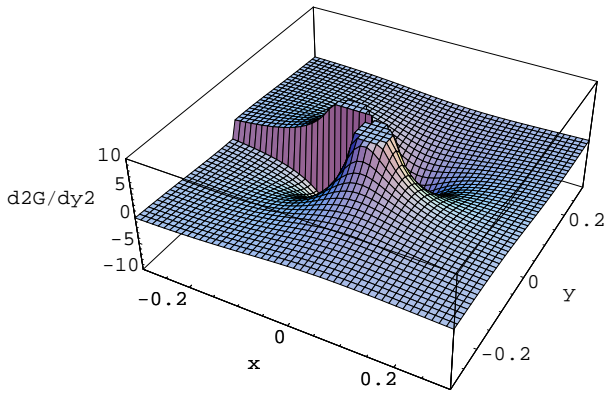
$$\iint \frac{\partial}{\partial y_x} \frac{\partial}{\partial y_y} G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) d^2\vec{y}$$



a.



b.



c.

Abbildung 4.2: Ortsableitung der Green'schen Funktion für die halbunendliche Platte, a. $\partial^2 G / \partial y_1^2$, b. $\partial^2 G / \partial y_1 \partial y_2$, c. $\partial^2 G / \partial y_2^2$,

ist jedoch divergent. Da aufgrund der Haftbedingung die Geschwindigkeit des Fluides in der Nähe der Wand und damit in der Nähe der Singularität verschwindet, ist es möglich, dass bei genügend feiner Auflösung des Problems keine numerischen Probleme durch die Singularität entstehen.

Um die Anwendbarkeit der Gl. (4.4) zu prüfen, wurde ein numerisches Experiment durchgeführt. Das Geschwindigkeitsfeld eines Wirbels über einer reibungsfreien Platte wurde geschätzt, in dem das Geschwindigkeitsfeld eines Oseen'schen Wirbels mit dem an der Platte gespiegelten Wirbelfeld addiert wurde. Zu dieser Geschwindigkeit wurde die Hintergrundströmungsgeschwindigkeit v_0 in x -Richtung addiert und die gesamte Struktur wurde entsprechend der mittleren Strömung stromabwärts bewegt:

$$\begin{aligned} v_x(x_1, x_2) &= \begin{cases} v_0 - \frac{x_2 - x_{2,w}}{r^2} r_0 v_{max} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}\right) - \frac{x_2 - x'_{2,w}}{r'^2} r_0 v_{max} \left(1 - e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}}\right) & \text{für } x_2 > 0 \\ v_0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases} \\ v_y(x_1, x_2) &= \begin{cases} -\frac{x_1 - x_{1,w}}{r^2} r_0 v_{max} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}\right) + \frac{x_1 - x'_{1,w}}{r'^2} r_0 v_{max} \left(1 - e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}}\right) & \text{für } x_2 > 0 \\ 0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wobei das Zentrum des Wirbels bei $(x_{1,w}, x_{2,w})$ lag. Die Platte wurde bei $x_2 = 0$ angenommen, daher befand sich der „Spiegelwirbel“ entsprechend bei $x'_{1,w} = x_{1,w}$, $x'_{2,w} = -x_{2,w}$. Der Abstand eines Punktes im Feld vom Wirbelzentrum ist durch $r = \sqrt{(x_1 - x_{1,w})^2 + (x_2 - x_{2,w})^2}$ bzw. $r' = \sqrt{(x_1 - x'_{1,w})^2 + (x_2 - x'_{2,w})^2}$ gegeben. v_{max} ist die maximale Umfangsgeschwindigkeit. Abb. 4.3 zeigt die Stromlinien für das Geschwindigkeitsfeld, wobei die mittlere Geschwindigkeit subtrahiert wurde.

Mit diesen Annahmen wurde das Integral in Gl. (4.4) berechnet, wobei die doppelte Ableitung der Green'schen Funktion nach dem Ort innerhalb eines Radius $n\Delta x$ gleich Null gesetzt wurde, um die Auswertung in der Nähe der Singularität zu vermeiden. Für diese Rechnung wurden $v_0 = 35$ m/s, $v_{max} = 6$ m/s, $r_0 = 1$ mm, $\Delta x = 0,2$ mm und $\Delta t = 10\Delta x/c_0/\sqrt{3}$ gewählt. Abb. 4.4 zeigt die Schalldruckverläufe, die sich bei der Passage eines einzelnen Wirbels an der Vorderkante für $n = 0, 1, 2, 4$ an einem Punkt auf Höhe der Vorderkante in 50 mm Abstand ergeben.

Zur Kontrolle wurde das Integral zusätzlich in der Form Gl. (4.3) berechnet, wobei die Ableitung mit Hilfe von zentralen Differenzen zweiter Ordnung und das Integral mit Riemann'schen Summen approximiert wurde. Das Ergebnis ist in Abb. 4.5 dargestellt (bezeichnet mit 'dSx'). Im Vergleich zur Berechnung mit der Formel (4.4) ('dGx') zeigt sich abgesehen von einem erheblichen, numerisch verursachten Rauschen nur ein sehr kleiner Unterschied. Dieses numerische Rauschen ist auf die Ungenauigkeit bei der numerischen Approximation der Ableitung des Quellterms mittels finiter Differenzen zurückzuführen. Da für die Geschwindigkeitsfelder in einer numerischen Lösung des Strömungsproblems keine analytischen Ausdrücke angegeben werden können, ist dann die numerische Differentiation nicht zu umgehen. Bei der Integration mit Formel (4.4) tritt dieses Problem nicht auf, weil hier die Ableitungen der Green'schen Funktion analytisch berechnet werden können.

Ein weiterer Vorteil der Formel (4.4) ist, dass durch die Form der Ableitungen der Green'schen Funktion in natürlicher Weise nur die Störungen in der Nähe der Vorderkante eingehen. Auf diese Weise entfällt eine Betrachtung der Grenzen des Integrationsvolumens, da dort die Ableitungen der Green'schen Funktion annähernd Null sind. Bei der Berechnung des Integrals (4.3)

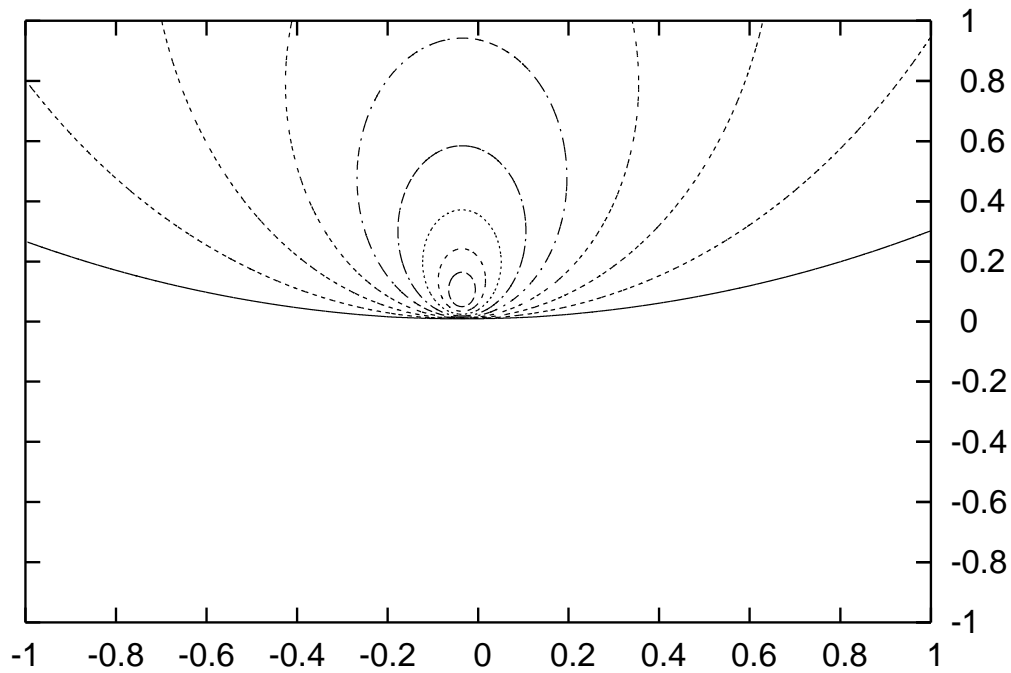


Abbildung 4.3: Stromlinien des für die Validierung der akustischen Analogie genutzten Wirbelfeldes, die mittlere Geschwindigkeit wurde subtrahiert.

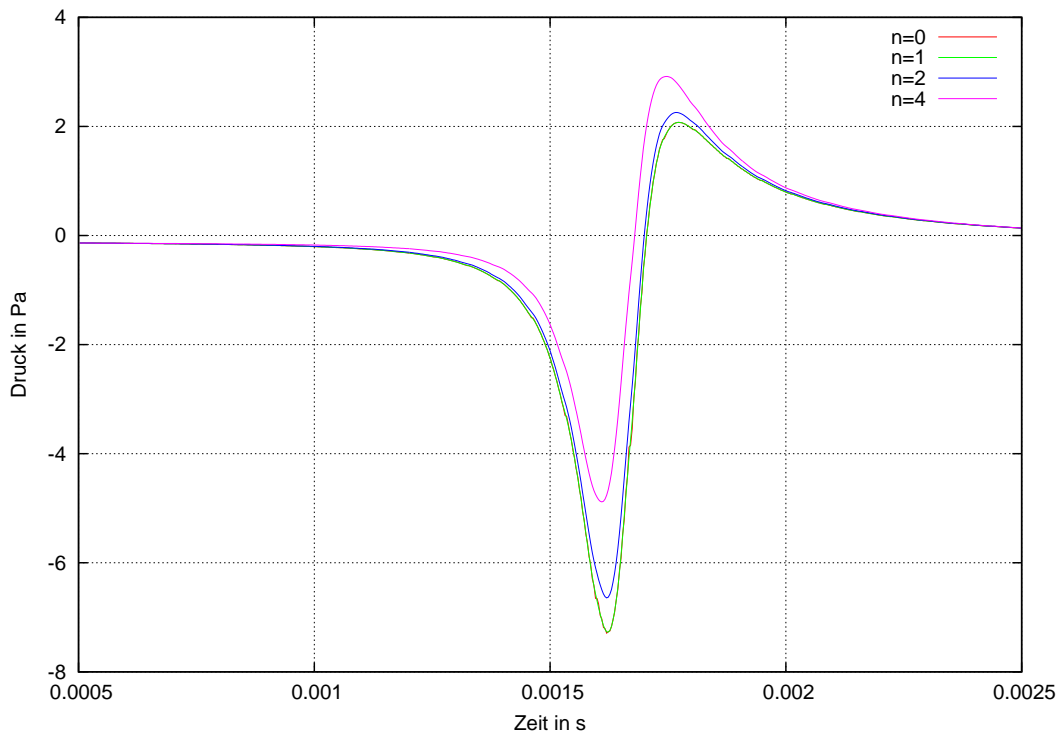


Abbildung 4.4: Schalldruckverläufe für die Passage eines Wirbels an der Vorderkante. Die Ortsableitung der Green'schen Funktion wurde während der Integration innerhalb eines Radius von $n\Delta x$ gleich Null gesetzt, um die Singularität direkt an der Vorderkante zu unterdrücken.

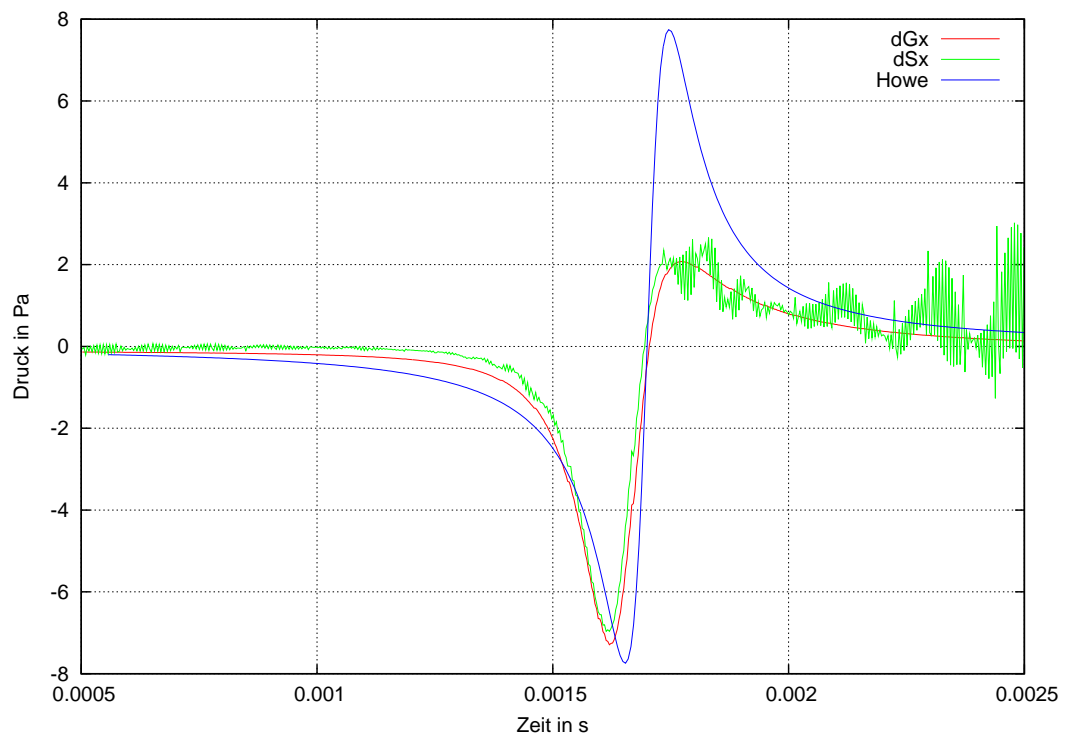


Abbildung 4.5: Schalldruckverläufe für die Passage eines Wirbels an der Vorderkante. Zum Vergleich wurde einmal die Ortsableitung auf die Green'sche Funktion (dG_x) angewandt, dann wurde der Lighthill'sche Spannungstensor genutzt (dS_x) und schließlich die analytische Abschätzung von Howe.

in einer Strömungssimulation ergäben sich hier einige Probleme, da die Green'sche Funktion selbst $\propto \sqrt{r}$ anwächst. Instationäre Störungen, die durch Konvektion in das Integrationsvolumen hinein bzw. heraus driften, würden bei Überschreiten der Ranges des Integrationsvolumens erhebliche Schwankungen auslösen, die als numerisch bedingtes Störsignal aufzufassen sind.

Howe gibt eine Formel zur Abschätzung für den durch Wechselwirkung mit einer Hinterkante erzeugten Schall an [30], die aufgrund der Symmetrie des Problems in gleicher Weise auf Vorderkantenschall anwendbar ist:

$$p(\vec{x}, t) \approx \frac{\rho_0 \Gamma v_0}{2\pi l} \sqrt{\frac{l}{|\vec{x}|}} \sin(\Theta/2) \left[\frac{v_0 t/l}{\left(1 + (v_0 t/l)^2\right)^{5/4}} \right]_{t=|\vec{x}|/c} \quad (4.5)$$

Hier ist Γ die Zirkulation des Wirbels und l der minimale Abstand des Wirbelzentrum von der Platte (siehe auch y_0 Abb.4.1). Die Zirkulation wurde mit $\Gamma = 2\pi l v_{max}/2$ abgeschätzt, im Übrigen wurden die gleichen Parameter wie bei den vorhergehenden Rechnungen verwandt. Diese Abschätzung ist ebenfalls in Abb. 4.5 gezeigt. Die Abweichung gegenüber den anderen Ergebnissen wurde schon früher beobachtet [40] und wird darauf zurück geführt, dass die analytische Abschätzung (4.5) von einem an einem Punkt konzentrierten Wirbel ausgeht während die anderen Verfahren ein realistischeres, verteiltes Vorticity-Feld zugrunde legen.

Insgesamt kann aufgrund der hier gezeigten Ergebnisse geschlossen werden, dass die Formel (4.4) eine brauchbare Möglichkeit zur Abschätzung des strömungsmechanisch erzeugten Schalls darstellt.

4.1.2 Beschreibung der Simulationen

Zur Untersuchung der Schallerzeugung an der Vorderkante einer unendlich dünnen, halbumendlichen Platte wurde das D2Q9-MRT-Verfahren wie eingangs beschrieben implementiert, d.h. es wurde hier wie bei allen anderen Simulationen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren nicht das linearisierte, sondern das nichtlineare Lattice-Boltzmann-Verfahren genutzt. Damit wurde das Strömungs- und Schallfeld eines einzelnen Wirbels berechnet, der durch die mittlere Strömung getrieben auf die Vorderkante einer halbumendlichen Platte mit der Dicke Null trifft (siehe Abb. 4.1). Für das Geschwindigkeitsfeld wurde eine anfängliche Form von

$$\begin{aligned} v_x(\vec{x}, t=0) &= v_0 - \frac{y' r_0}{r'^2} v_{max} \left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{r_0^2}\right) \right) \\ v_y(\vec{x}, t=0) &= \frac{x' r_0}{r'^2} v_{max} \left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{r_0^2}\right) \right) \end{aligned}$$

vorgegeben, wobei sich die Koordinaten x', y', r' auf das Zentrum des Wirbels beziehen. Der Druck bzw. die Dichte wurde als konstant angesetzt, was bei der Simulation dazu führte, dass zunächst eine Schallwelle am Wirbelmittelpunkt erzeugt wurde, bis sich das Druckfeld entsprechend dem Geschwindigkeitsfeld eingestellt hatte. Entsprechend musste die Simulation so aufgesetzt werden, dass die durch diese Störung erzeugte Schallwelle genügend Zeit hatte, das Rechenggebiet zu verlassen, bevor der Wirbel mit der Vorderkante in Wechselwirkung treten konnte.

Die Wechselwirkung eines einzelnen Wirbels mit der Vorderkante einer Platte ist ein lokal begrenztes Ereignis. Es ist daher möglich, das Rechenggebiet der Simulation so groß zu wählen, dass

Tabelle 4.1: Parameter der Simulation der Wechselwirkung eines Wirbels mit der Vorderkante einer halbumendlichen Platte.

Physikalische Parameter	
Medium	Luft (ideales Gas)
mittlerer Luftdruck	101300 Pa
kinematische Viskosität	$1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Dichte	$1,21 \text{ kg/m}^3$
Schallgeschwindigkeit	340 m/s
Einströmgeschwindigkeit	20 m/s, 30 m/s
Wirbelradius r_0	0,4 mm
Wirbelumfanggeschwindigkeit v_{max}	3 m/s, 6 m/s
Anfangsabstand Wirbel-Vorderkante x_0	50 mm
Abstand Wirbelzentrum-Platte in y -Richtung y_0	0,6 mm
Abstand Vorderkante-Position Druckmesspunkte	66 mm
Simulationsparameter	
Gitterweite	0,1 mm
Zeitschritt	$1.698 \times 10^{-7} \text{ s}$
Größe des Rechengebietes	$200 \times 200 \text{ mm}^2$

die Randbedingungen an den Rändern des Rechengebietes während der Wechselwirkung und eine kurze Zeit danach keinen Einfluss auf die Vorgänge im Zentrum des Rechengebietes haben. Aus diesem Grunde konnte auf eine spezielle „akustische Fernfeld-Randbedingung“ verzichtet werden. Die Ränder wurden daher mit einer „Gleichgewichtsrandbedingung“ behandelt, d.h. von der ersten Knotenschicht außerhalb des Rechengebietes wurden die dem Gleichgewicht bei mittlerer Dichte ρ_0 und Geschwindigkeit \vec{u}_0 entsprechenden Werte der Gleichgewichtsverteilung in das Rechengebiet übermittelt. Tabelle 4.1 gibt die wesentlichen Parameter der Simulation wieder.

Realisierung der Platte

Die Platte wurde unendlich dünn angenommen. An der Platte wurde eine Haftbedingung angenommen, die durch die sogenannte „bounce-back“-Bedingung realisiert wurde (siehe Abb. 4.6). Dabei werden die Teilchenströme in die Ursprungsrichtung zurück reflektiert. Auf diese Weise ist für eine ebene Platte in der Mitte zwischen zwei Knotenebenen die Geschwindigkeit annähernd gleich Null, d.h. die Haftbedingung annähernd realisiert. Diese Randbedingung lässt sich mit einer Genauigkeit 2. Ordnung sehr effizient implementieren (der Geschwindigkeitsfehler im Fluid ist für eine Poiseuille-Strömung etwa $O(\nu \Delta x^2)$), da lediglich der Propagationsschritt in der Simulation am Rand modifiziert werden muss [63, 26, 42, 43]. An der Vorderkante der Platte wurde an dem mit „B“ bezeichneten Knoten die „bounce-back“-Bedingung angenommen, am Punkt „C“ wurde die normale Propagation angewandt. Oberhalb der Platte werden die gleichen Regeln wie unterhalb, jedoch entsprechend gespiegelt, angewandt.

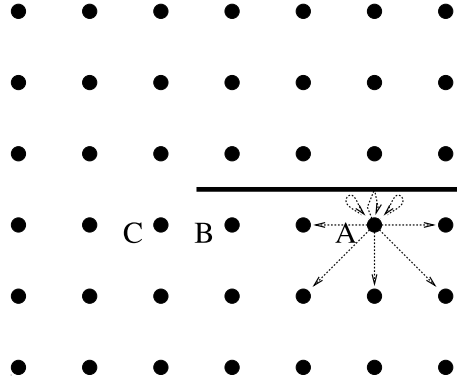


Abbildung 4.6: Der Effekt einer unendlich dünnen Platte in der Mitte zwischen zwei Knotenebenen wird durch modifizierte Reflexion der Teilchenströme nachgebildet. „Bounce-back“ bildet die Haftbedingung nach.

4.1.3 Ergebnisse

Geschwindigkeits- und Druckfelder

Die Abbildung 4.7 zeigt das momentane Druckfeld des Wirbels zu dem Zeitpunkt, wo sich das Zentrum des Wirbels über der Vorderkante befindet.

Einerseits ist im Bereich der Vorderkante das Druckfeld des Wirbels zu erkennen, das durch die Anwesenheit der Platte bereits deutlich verzerrt wird. Des weiteren ist die erzeugte Schallwelle zu erkennen, die oberhalb der Platte als Unterdruck, und unterhalb der Platte als Überdruckwelle abgestrahlt wird.

Auf einem Kreis mit dem Radius von 66 mm um die Vorkerkante wurde alle 5° der Druck aufgenommen, woraus sich die Richtcharakteristik berechnen lässt. Das Ergebnis zeigt Abb. 4.8. Die konvektive Verstärkung der Schallabstrahlung wurde vernachlässigt. Die Richtcharakteristik der direkt simulierten Druckwelle stimmt im Wesentlichen sehr gut mit dem Ergebnis aus der akustischen Analogie überein. Lediglich stromauf bei ca. 135° und 240° sind geringe Abweichungen zu erkennen. Diese Abweichungen werden wahrscheinlich durch Verzerrungen des Druckfeldes des Wirbels verursacht, die sich aus der relativ groben Auflösung des Wirbels von 4 Gitterschrittweiten pro Wirbelradius r_0 ergeben. Diese Hypothese konnte nicht genauer untersucht werden, da eine Erhöhung der Auflösung die rechentechnisch gegebenen Möglichkeiten überstiegen hätte.

Die Simulationen wurden mit einer mittleren Geschwindigkeit u_∞ von 20 m/s und 30 m/s sowie Wirbelumfangsgeschwindigkeiten v_{max} von 3 m/s und 6 m/s durchgeführt, um die Skalierung des abgestrahlten Schalls in Abhängigkeit dieser Größen zu bestimmen. Abb. 4.9 und 4.10 zeigt die Druckschwankungen unter einem Winkel von 90° zur Platte über der Vorderkante im Abstand von 66 mm als Funktion der Zeit, wobei die Anströmgeschwindigkeiten jeweils 20 m/s bzw. 30 m/s und die Wirbelumfangsgeschwindigkeiten v_{max} 3 m/s bzw. 6 m/s betrugen. Bei diesen Rechnungen ist aufgrund theoretischer Überlegungen zu erwarten, dass die Amplitude der Schallabstrahlung linear sowohl mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit als auch der Wirbelumfangsgeschwindigkeit skaliert [29], was sich für die Auswertung der akustischen Analogie zwangsläufig ergibt. Generell ist eine sehr gute Übereinstimmung der Druckmaxima zwischen dem direkt simulierten Signal und der Vorhersage mit Hilfe der akustischen Analogie festzustellen. Die direkt simulierten Schallsignale hängen also in gleicher Weise von den betreffenden Strömungsgrößen ab wie die Ergebnisse, die mit der akustischen Analogie berechnet wurden.

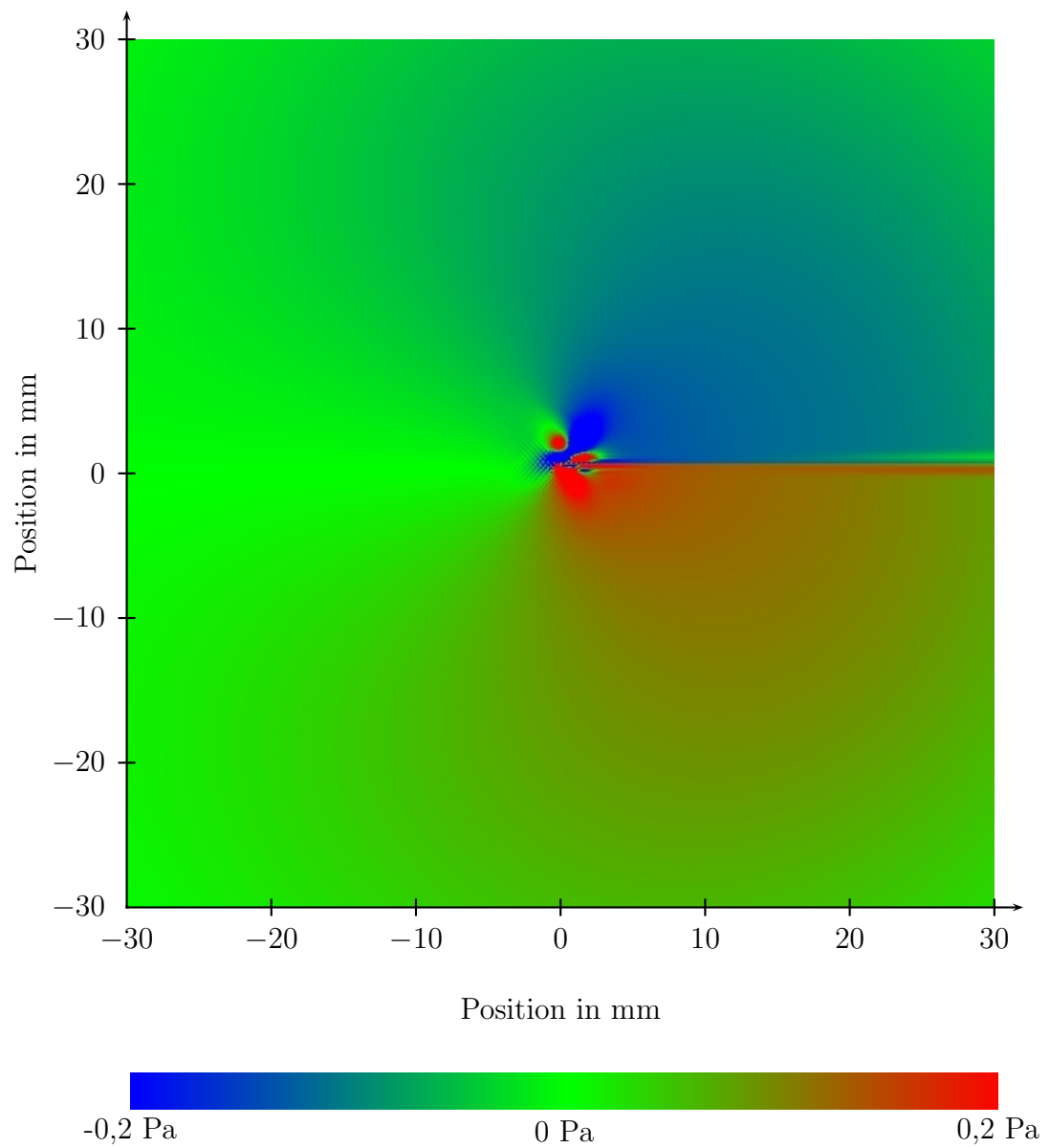


Abbildung 4.7: Schnappschuss des Druckfeldes um die Vorderkante einer halbunendlichen Platte. rot: 0,2 Pa Überdruck, blau: 0,2 Pa Unterdruck.

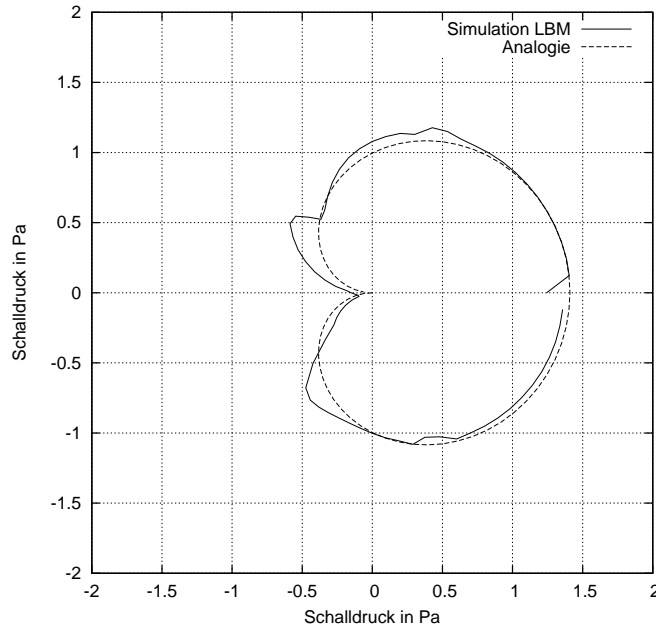


Abbildung 4.8: Richtcharakteristik des von der Vorderkante einer halbumendlichen Platte abgestrahlten Schalls, Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 20$ m/s, Wirbelumfanggeschwindigkeit $v_{max} = 3$ m/s. Die durchgezogene Kurve zeigt die Amplitude der direkt simulierten Druckwelle, die gestrichelte Kurve entspricht dem Ergebnis der Auswertung der akustischen Analogie.

Die Druckmaxima skalieren wie erwartet mit der mittleren Geschwindigkeit und der Wirbelumfanggeschwindigkeit. Die Form der Zeitsignale stimmt jedoch weniger gut überein, offenbar ist in den direkt simulierten Schallwellen mehr Energie enthalten, als die Analogie vorhersagt. Die direkt simulierten Schalldruck/Zeitverläufe bei 30 m/s Anströmgeschwindigkeit zeigen im Bereich vor $t = 0,004$ s und nach $t = 0,0055$ s einige Schwankungen, die auf „Störschallwellen“, d.h. vor allem Reflexionen des unvermeidbaren „Anfangsknalls“ zurückzuführen sind.

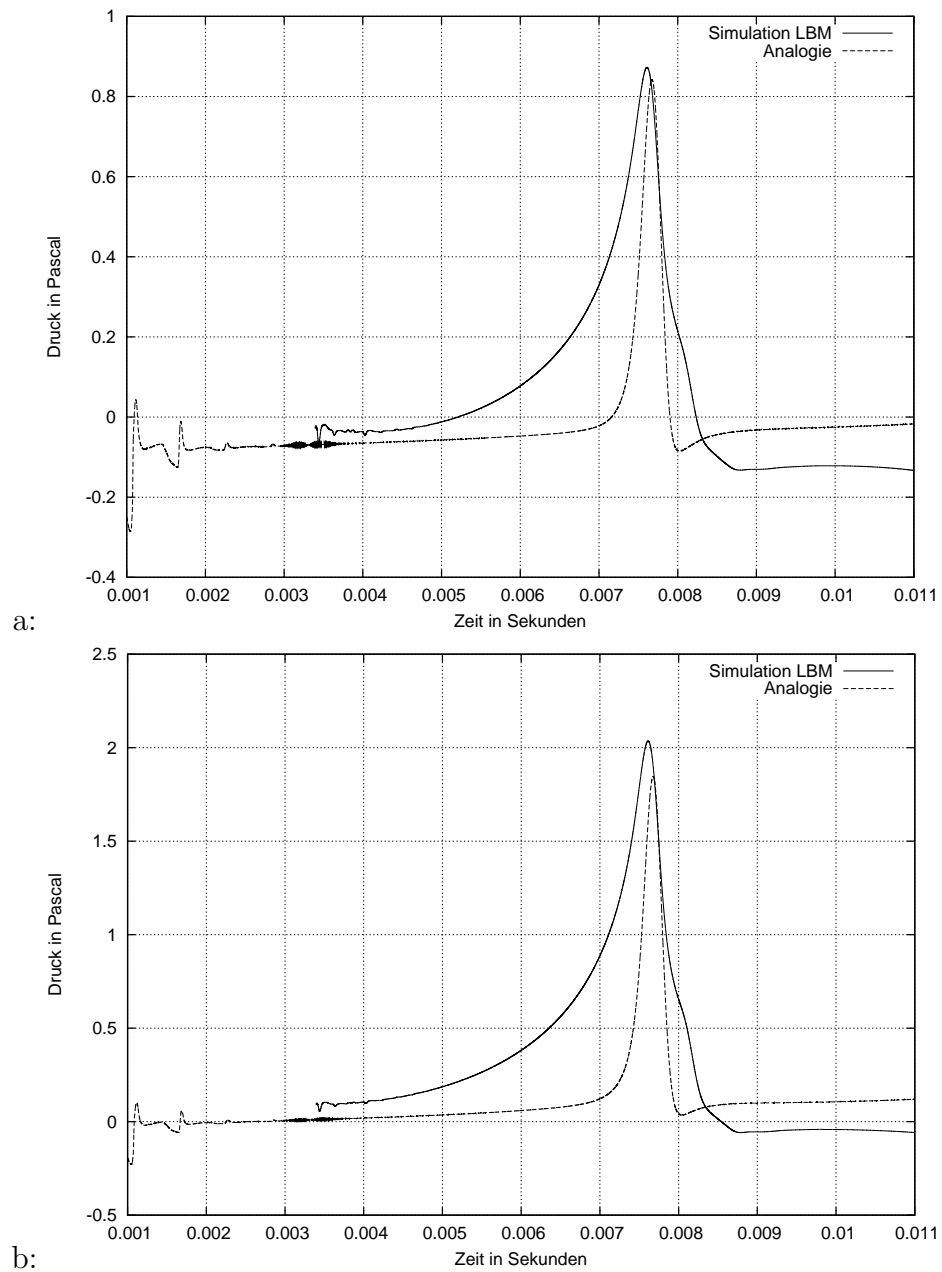


Abbildung 4.9: Schallabstrahlung von der Vorderkante einer halbumendlichen Platte bei einer Anströmgeschwindigkeit von 20 m/s und $v_0=3$ m/s (a) bzw. 6 m/s (b).

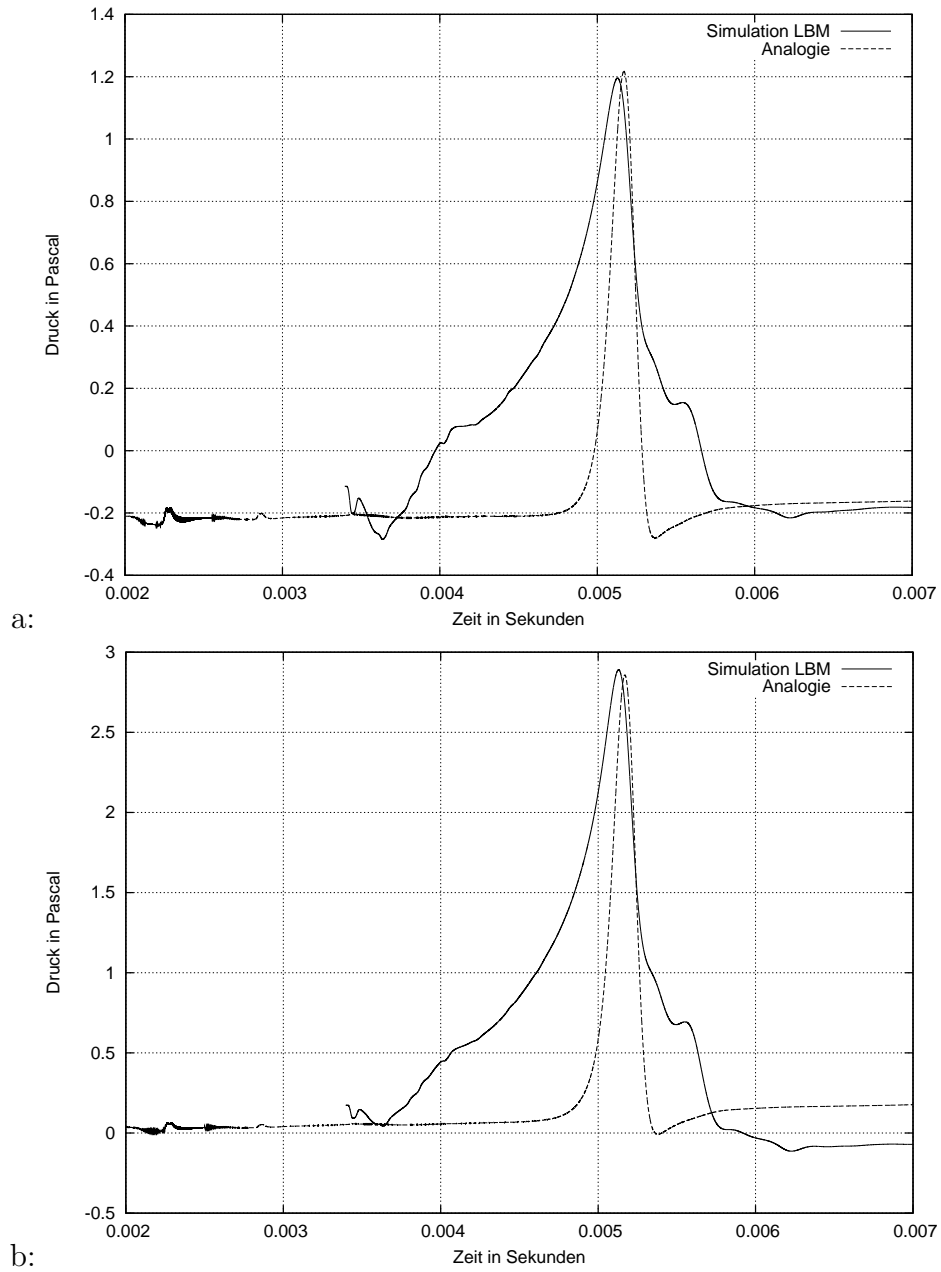


Abbildung 4.10: Schallabstrahlung von der Vorderkante einer halbumendlichen Platte bei einer Anströmgeschwindigkeit von 30 m/s und $v_0=3$ m/s (a) bzw. 6 m/s (b).

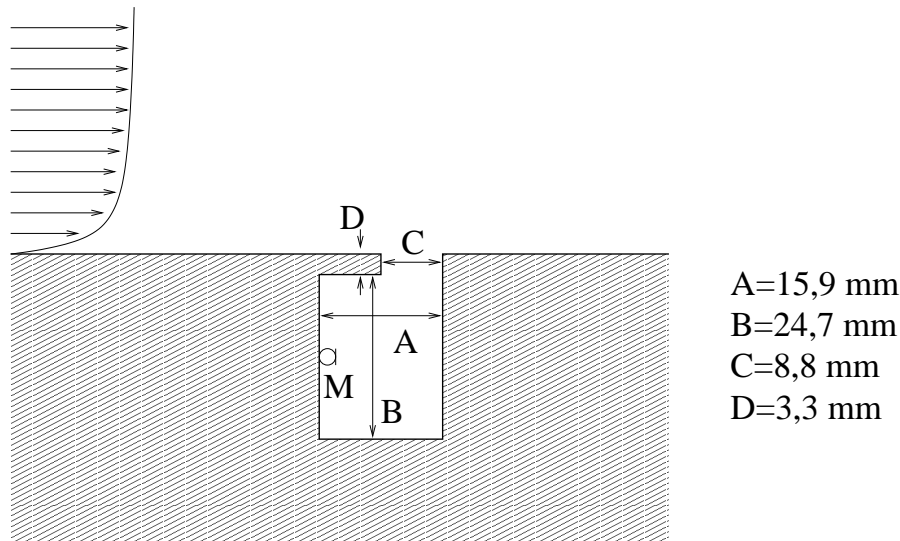


Abbildung 4.11: Skizze der Geometrie des überströmten Helmholtzresonators. Die Dicke der Grenzschicht über der Platte beträgt laut Problemdefinition 16 mm (22 mm) bei einer Strömungsgeschwindigkeit von $v_\infty = 26,8 \text{ m/s}$ (50,9 m/s). An dem mit „M“ bezeichneten Ort befand sich ein Sensor zur Messung der Druckschwankungen.

4.2 Helmholtzresonator in einer überströmten Platte

4.2.1 Beschreibung des Experimentes

Die Definition des Experimentes geht auf einen Testfall für den dritten „Computational Aeroacoustics Workshop on benchmark problems“ in Ohio 1999 zurück [27]. In einer ebenen Platte eingebettet befindet sich ein Helmholtzresonator, in dem durch die Strömung über der Platte durch Rückkopplung eine tonale Druckschwankung erzeugt wird. Für die Grenzschicht kann vereinfachend ein Geschwindigkeitsprofil entsprechend

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

angenommen werden, wobei δ die Grenzschichtdicke ist. Die Definition des Problems bezieht sich nur auf 2 räumliche Dimensionen, nämlich die Stromab-Richtung und die Wandnormale. In der Spannweiten-Richtung wird das Problem als konstant definiert, um eine zweidimensionale Rechnung zu ermöglichen. Zu diesem Benchmarkproblem gab es beim o.g. Workshop außer der experimentellen Arbeit von Henderson [27] drei Beiträge, in denen das Problem numerisch behandelt wurde [44, 34, 3]. Die dort erzielten Ergebnisse werden zusammen mit den Resultaten dieser Arbeit im Folgenden diskutiert. Das Problem wurde beim folgenden CAA-Workshop wieder aufgegriffen, hier allerdings mit einer etwas veränderten Anströmung.

Ähnliche Experimente (überströmte Resonatoren mit anderen Geometrien) wurden z.B. von Nelson, Halliway und Doak durchgeführt [45, 46] und später durch andere Gruppen numerisch untersucht [48, 41].

Das vorliegende Problem wurde numerisch sowohl mit dem kommerziell verfügbaren Programm PowerFLOW (Version 3.4p4) als auch mit einem selbst verfassten Programm untersucht.

Ricot, Maillard und Bailly untersuchten ein ähnliches Experiment mit einem zweidimensionalen Lattice-Boltzmann-Ansatz [48] und fanden gute Übereinstimmung zwischen Simulation

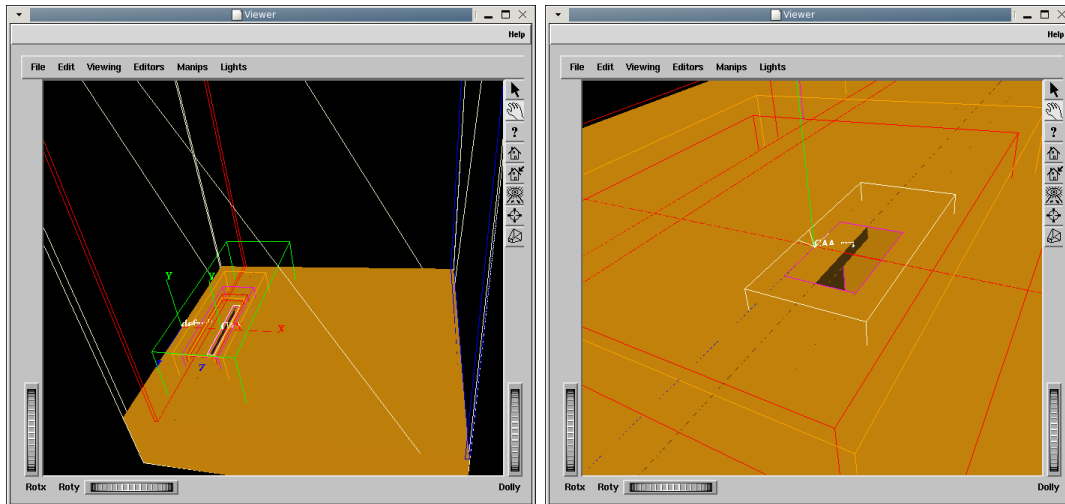


Abbildung 4.12: Geometriedefinition des Testbeispiels Helmholtzresonator in PowerFLOW. Links: Übersicht, rechts: Detailansicht.

und Experiment bei der Resonanzfrequenz. Die Druckschwankungen bei der Resonanzfrequenz in der Kavität wurden jedoch durch die Simulation um ca. 10 dB unterschätzt. Mallick, Shock und Yakhot [41] fanden für das selbe Experiment bei einer dreidimensionalen Simulation mit PowerFLOW gute Übereinstimmung sowohl bei Resonanzfrequenz als auch Druckschwankungen. In dieser Arbeit werden zwei potentielle Gründe für die Unterschiede zwischen den Ergebnissen mit zwei- bzw. dreidimensionalen Simulationen genannt: Die Autoren vermuten, dass dreidimensionale Störungen der Scherschicht in der Resonatoröffnung viel zur Intensität der Druckschwankungen beitragen, erwähnen aber auch die Möglichkeit, dass die unterschiedliche Schallabstrahlung von Bedeutung sein könnte.

Simulation des Helmholtzresonatorproblems mit PowerFLOW

PowerFLOW nutzt zur approximativen Lösung der Boltzmann-Gleichung eine modifizierte Fassung der LBGK-Gleichung, wobei die Verteilungsfunktion durch 16-bit Festkomma-Zahlen approximiert wird. Für dieses Verfahren lässt sich die Existenz eines H -Theorems (H : Entropie) nachweisen [13], was die Folge hat, dass das Modell unbedingt stabil ist. Die Darstellung der Verteilungsfunktion über 16-bit Integer-Zahlen bewirkt jedoch, dass die Ergebnisse mit einem für akustische Rechnungen unter Normalbedingungen starken, breitbandigen Rauschen von 70 dB durch die Quantisierung behaftet sind. PowerFLOW wird ab der Version 4 das D3Q19-Modell mit 32-bit-Fließkomma-Zahlen zur Approximation der Verteilungsfunktion nutzen, was das Grundrauschen deutlich verringert. Im Bereich höherer Reynoldszahlen nutzt PowerFLOW einerseits ein Turbulenzmodell [56] und andererseits ein Wandmodell [14].

Abb. 4.12 zeigt die Definition der Geometrie der Simulation des Helmholtzresonators. Das Rechengebiet hat eine Ausdehnung von $0,9 \times 1,5 \times 0,8 \text{ m}^3$. Um Rechengebiete dieser Größe mit der zur Verfügung stehenden Rechentechnik zu bearbeiten, muss die Technik der lokalen Gitterverfeinerung [21] genutzt werden, die in PowerFLOW implementiert ist.

Für die korrekte Simulation der Strömung muss in diesem Fall die Öffnung des Helmholtzresonators mit mindestens 50 Gitterpunkten in Strömungsrichtung aufgelöst werden, was einer minimalen Gitterweite von ca. 0,18 mm entspricht ($h50$ -Simulation). In Abb. 4.12 sind die quaderförmigen Gebiete mit verfeinertem Gitter durch die Kanten der jeweiligen Quader dar-

Tabelle 4.2: Parameter der Simulation der Strömung über einem Helmholtzresonator.

Physikalische Parameter	
Medium	Luft (ideales Gas)
mittlerer Luftdruck	101300 Pa
kinematische Viskosität	$1,49 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Dichte	$1,2047 \text{ kg/m}^3$
Temperatur	293 K
Schallgeschwindigkeit	343,2 m/s
Einströmgeschwindigkeit	50 m/s
Reynoldszahl	ca. 29500
Simulationsparameter PowerFLOW	
minimale Gitterweite	0,18 mm
minimaler Zeitschritt	$4,052 \times 10^{-7} \text{ s}$
Größe des Rechengebietes	$0,9 \times 1,5 \times 0,8 \text{ m}^3$
Anfangsturbulenzintensität(*)	0,01
Anfängliche charakteristische Turbulenzlänge(*)	5 mm
Simulationsparameter D2Q9 LBGK	
Gitterweite	0,133 mm
Zeitschritt	$2,26 \times 10^{-7} \text{ s}$
Größe des Rechengebietes	$158,5 \times 98,4 \text{ mm}^2$
Glättungsparameter α	0,001

(*) Parameter des in PowerFLOW implementierten Turbulenzmodells

gestellt. Beim Übergang von einem Gebiet zum nächsten wird die Gitterweite jeweils halbiert bzw. verdoppelt. Es wurden hier 8 Verfeinerungsstufen benutzt, die größte Gitterweite entspricht somit 45 mm.

PowerFLOW bietet in der Version 3.4 verschiedene Randbedingungen an: Wände mit und ohne Reibung, Geschwindigkeit und Druck. Alle diese Bedingungen sind für akustische Simulationen von offenen Gebieten ungeeignet, da sie Schallwellen vollständig in das Rechengebiet zurück reflektieren. Bei diesem Experiment wird jedoch einerseits das Gitter ausgehend vom Helmholtzresonator stark vergrößert, was eine starke Dämpfung der Schallwellen bewirkt, andererseits wird nur der Wechseldruck innerhalb des Resonators betrachtet, der sehr viel größer ist als die durch die Schallwellen im Fernfeld hervorgerufenen Druckschwankungen. Die Auswirkung der Übergänge von feinen auf grobe Gitter auf Schallwellen wurde hier nicht untersucht. Eine vollständige Liste aller Simulationsparameter gibt Tabelle 4.2.

Die Einströmebene wurde 50 mm stromaufwärts von der Vorderkante der Resonatoröffnung platziert. Hier wurde die Geschwindigkeit entsprechend dem in der Problemstellung definierten Profil vorgegeben. Die Ausströmebene befand sich am Rand des Rechengebietes, dort wurde Normaldruck als Randbedingungen gesetzt.

Simulation des Helmholtzresonatorproblems mit dem D2Q9-LBGK Modell

Für die Simulation der Strömung über dem Hohlraum wurde das D2Q9-Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook-Modell wie eingangs beschrieben in der Programmiersprache C implementiert. Im Gegensatz zu den Rechnungen mit PowerFLOW wurde hier jedoch keine lokale Gitter-

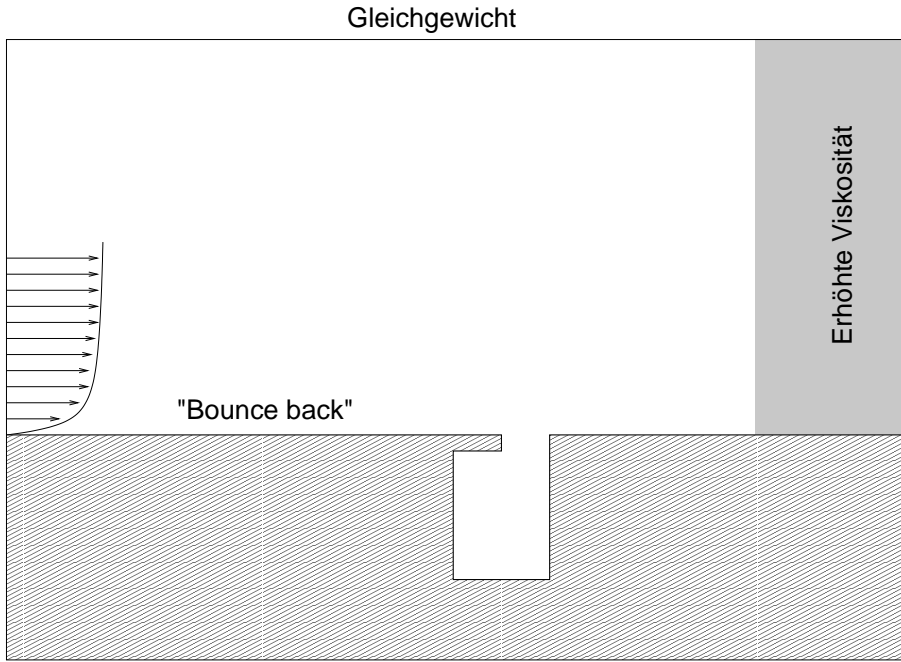


Abbildung 4.13: Randbedingungen für die Simulation der Strömung über einen Hohlraum mit dem D2Q9-Lattice-Boltzmannverfahren.

verfeinerung, kein Turbulenzmodell und kein Wandmodell angewendet. Um Instabilitäten zu unterdrücken, die in der Scherschicht in der Öffnung des Hohlraumes aufklingen, wurde ein räumlicher Tiefpassfilter 4. Ordnung benutzt [52].

Abb. 4.13 zeigt die Anordnung der benutzten Randbedingungen. An den Grenzflächen zur Oberfläche bzw. den Wänden des Hohlraumes wurde die sogenannte „bounce back“ Bedingung genutzt wie im Abschnitt 4.1.2 erklärt. Für die obere Begrenzung des Rechengebietes wurden die „Gleichgewichts“-Randbedingung benutzt (siehe Abschnitt 4.1.2). Am Ein- und Ausströmrand wurde die Geschwindigkeit bzw. der Druck vorgeschrieben. Um Reflexionen von den Rändern zu verringern, wurden die vorgegebenen Werte ad-hoc mit folgender Formel bestimmt:

$$v(\vec{x}, t) = \frac{1}{10}v_0(\vec{x}) + \frac{9}{10}v(\vec{x}, t - \Delta t)$$

wobei $v_0(\vec{x})$ der Nominalwert der Einströmgeschwindigkeit bzw. des Druckes am Ausströmrand ist.

Zusätzlich wurde in einem Gebiet am Ausströmrand die Viskosität langsam erhöht, um die am Hohlraum erzeugten Störungen vor dem Austritt aus dem Rechengebiet zu dämpfen.

4.2.2 Ergebnisse

Schallerzeugungsmechanismus und Vorgänge im Resonator

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Rechnungen mit dem D2Q9-Modell für eine Anströmgeschwindigkeit von 60 m/s bei einer Grenzschichtdicke von 12 mm vorgestellt. Die Rechnungen bei anderen Strömungsbedingungen bzw. mit dem dreidimensionalen Modell unter Nutzung von PowerFLOW erbrachten bis auf eine Ausnahme, bei der keine Resonanzschwingung auftrat, qualitativ gleiche Ergebnisse und werden daher in diesem Abschnitt nicht im Einzelnen diskutiert.

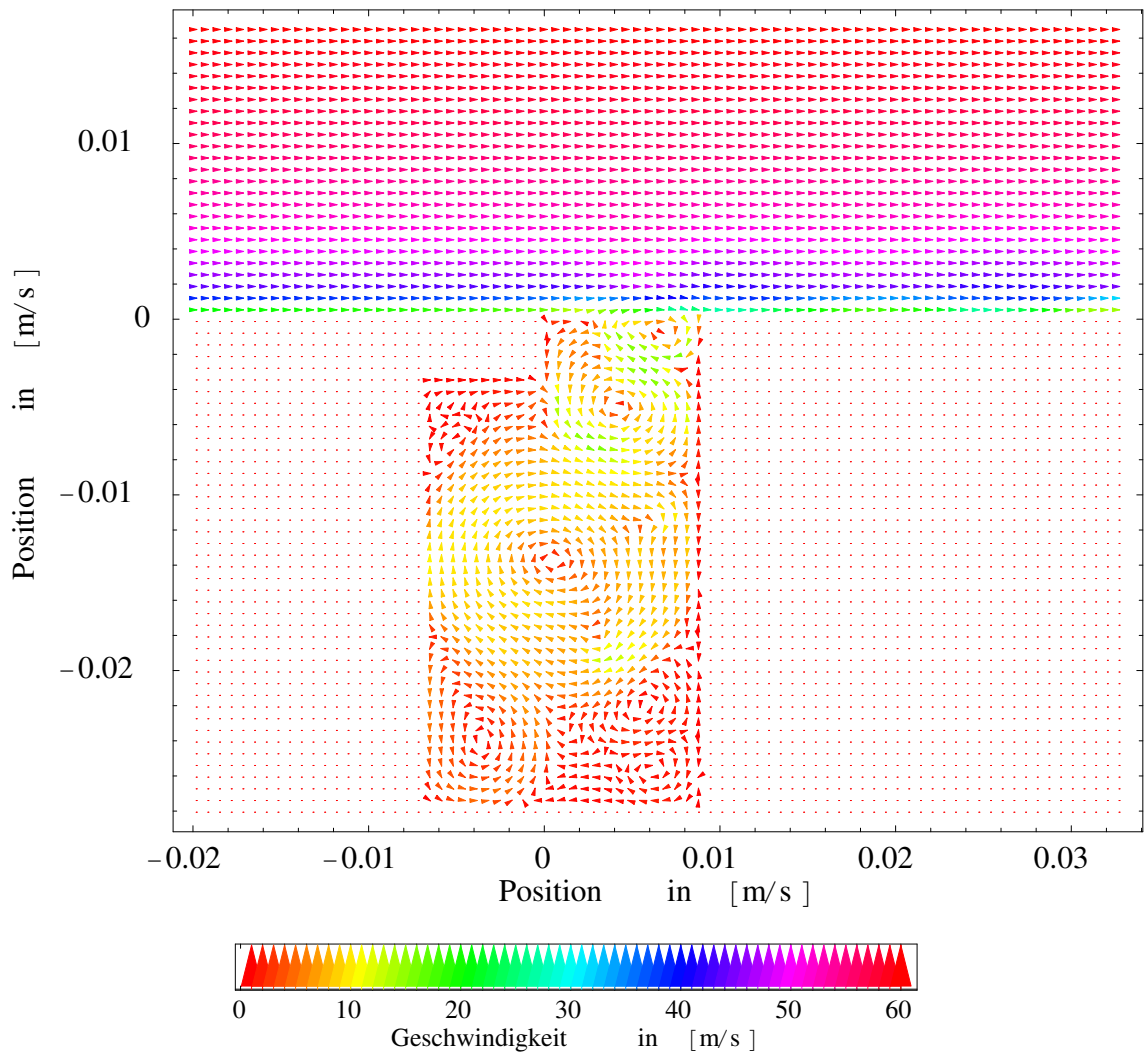


Abbildung 4.14: Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes im Hohlraum, für eine nominale Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 60$ m/s.

Abbildung 4.14 zeigt eine Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes im Hohlraum und seiner nahen Umgebung. Oberhalb der Platte ist eine weitgehend homogene Strömung zu sehen, die das vorgegebene Grenzschichtprofil aufweist. Im Hohlraum befindet sich kurz unterhalb der Öffnung ein großer, im Gegenuhrzeigersinn rotierender Wirbel und im Zentrum des Hohlraumes ein weiterer großer, im Uhrzeigersinn rotierender Wirbel. Daneben existieren noch mehrere weitere, kleinere Wirbel, z.B. in unmittelbarer Nähe der Hinterkante der Öffnung. Die Position der großen Wirbel bleibt im Verlauf einer Simulation nicht konstant, ihre Zentren sind zu verschiedenen Zeitpunkten an verschiedenen Orten im Hohlraum zu finden. Offenbar hat die Position insbesondere des Wirbels in der Öffnung Einfluss auf den Schallerzeugungsmechanismus.

Der Vergleich der Vorticity mit den Ergebnissen anderer Autoren (siehe Abb. 4.15) zeigt in Bezug auf die Vorgänge in der Öffnung und hinter dem Hohlraum über der Platte große Ähnlichkeiten: Über der Öffnung kommt es zu einer Störung der vertikalen Komponente der Geschwindigkeit, was zu Wirbelbildung und einer "wellenartigen Ausbreitung", d.h. einer Konvektion der Vorticity stromab hinter dem Hohlraum führt, d.h. dass das Vorticity-Profil periodisch schwankt. Im Hohlraum selbst ergeben sich doch einige Unterschiede, die vor allem die

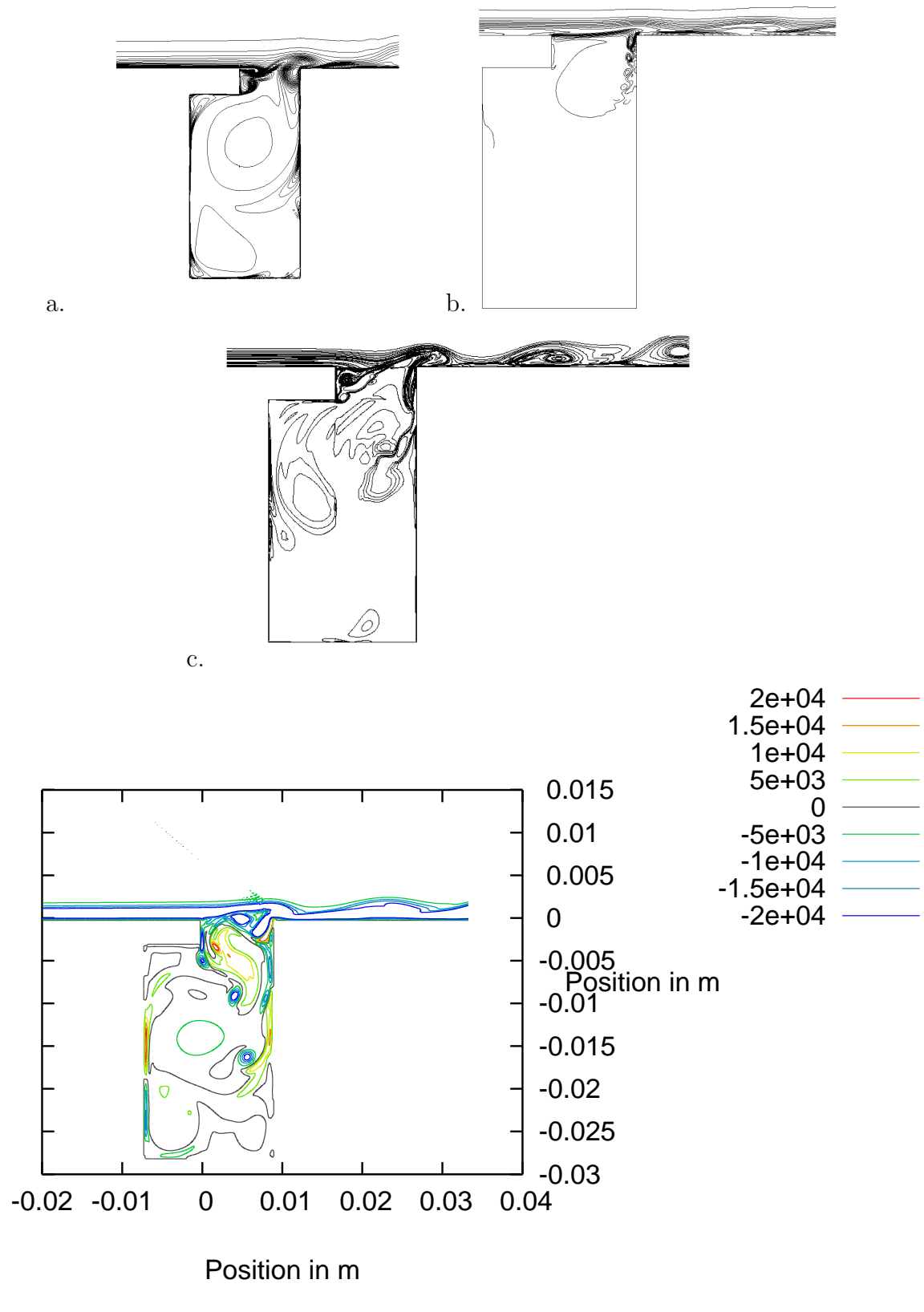


Abbildung 4.15: a.: Iso-Linien der momentanen Vorticity nach Ashcroft et al. [3] b.: nach Kurbastky und Tam [34], c.: Moon et al. [44], die Abbildungen sind den zitierten Arbeiten entnommen, d.: diese Arbeit, in s^{-1} D2Q9-LBGK

Position und Ausbildung der Wirbel betreffen. Diese Unterschiede sind vor allem auf die unterschiedlichen Zeiten zurückzuführen, zu denen die Momentaufnahmen der Vorticity entstanden. Die Wirbelsysteme im Hohlraum benötigen zu ihrer Entstehung einige Zeit. Die Autoren [34, 3, 44] machen zum Teil keine Angaben über den Zeitpunkt, zu dem die Momentaufnahmen entstanden. Aufgrund der übrigen präsentierten Ergebnisse kann man jedoch davon ausgehen, dass alle Momentaufnahmen der Vorticity im Zeitraum bis zu dem dimensionslosen Zeitpunkt $t \leq 40$ gemacht wurden. Die hier berechnete Momentaufnahme wurde etwa bei $t = 325,4$ gemacht.

Abb. 4.16 zeigt die rms-Schwankungen des Druckes bzw. der Geschwindigkeitskomponenten in x - bzw. y -Richtung, und Abb. 4.17 die Phasenlage dieser Größen bezogen auf die Druckschwankung am Ort des Mikrofons. Wenn man davon ausgeht, dass bei diesem Experiment der Schallerzeugungsmechanismus der gleiche ist wie in dem Experiment von Nelson et al. [45, 46], so können die Ergebnisse für die rms-Schwankungen qualitativ, die Ergebnisse für die Phasenlagen der Schwankungen sogar quantitativ mit den Ergebnissen dort verglichen werden. Die Phasenlage der Schwankungen wurde berechnet, in dem an jedem Ort die Zeitserie der entsprechenden Größe in den Frequenzbereich transformiert wurde. Anschließend wurde die Phase der Schwankung bei der Resonanzfrequenz aus der komplexen Amplitude ermittelt und der Referenzwert für die Druckschwankung an der Position des Mikrofons subtrahiert. Bei dieser Gelegenheit wurde auch der Betrag der komplexen Amplitude bestimmt. Es zeigte sich, dass die Ergebnisse nur für die Geschwindigkeit und nur im Hohlraum, aber nicht im Bereich der Öffnung überhaupt nennenswert von den rms-Schwankungen abweichen. Offenbar ist die Variabilität des Druckes bzw. der Geschwindigkeit im Bereich der Öffnung im Wesentlichen auf die Resonanzschwingung zurückzuführen.

Aus Abb. 4.17a. ist zu entnehmen, dass die Phasenlage der Druckschwankung im Hohlraum praktisch konstant gleich der Phasenlage der Druckschwankung an der Mikrofonposition ist. Damit können für die akustischen Schwankungen Laufzeiteffekte im Hohlraum vernachlässigt werden. Abb. 4.16a. zeigt, dass die Druckschwankungen im Hohlraum ebenfalls überall annähernd gleich groß sind. Diese Ergebnisse zeigen, dass offenbar eine Helmholtz-Resonanz im Hohlraum angeregt wurde, ebenso wie dies bei dem Experiment von Nelson et al. der Fall war. Am oberen Ende der Öffnung des Hohlraumes ist in Abb. 4.16a. ein Gebiet mit vergleichsweise geringen Druckschwankungen zu erkennen. Der Vergleich mit der Phasenlage der Druckschwankung an dieser Stelle in Abb. 4.17a. ergibt, dass hier offenbar eine destruktive Interferenz zweier Druckfelder auftritt. Dieses Gebiet findet sich auch in den Ergebnissen von Nelson et al., allerdings ist das Gebiet bei Nelson et al. im Vergleich zum hier gezeigten Experiment etwas stromab verschoben. Nelson et al. gehen von der Ausbildung diskreter Wirbel in der Scherschicht über der Öffnung des Hohlraumes aus und erklären diese Ergebnisse damit, dass die Wirbel mit einer bestimmten Konvektionsgeschwindigkeit über die Öffnung hinweg driften. Der Verlauf der Phasenlage der Druckschwankungen in der potentiellen Zugbahn dieser Wirbel unterstützt diese These.

Die Abb. 4.16b. zeigt zwei wesentliche Strukturen: Einerseits befindet sich unmittelbar über der Öffnung des Hohlraumes ein Gebiet starker Schwankungen der x -Komponente der Geschwindigkeit, andererseits ist stromab von der Hinterkante der Öffnung unmittelbar an der Wand ein weiteres solches Gebiet. Diese Erscheinung wurde auch von Nelson et al. beobachtet. Die Phasenlage der Geschwindigkeitsschwankungen stimmt in den genannten Gebieten gut mit den Ergebnisse von Nelson überein. Weiter unter in der Öffnung bzw. im Hohlraum selbst ergibt der Vergleich mit Nelson's Ergebnissen eine geringere Übereinstimmung, was wahrscheinlich auf die unterschiedlichen Formen der Hohlräume in diesem Experiment und bei Nelson et

al. zurückzuführen ist. Durch die Verschiedenheit in der Form des Hohlraums bilden sich unterschiedliche Rückströmungsgebiete aus.

In Abb. 4.16c. ist ersichtlich, dass große rms-Schwankungen der y -Komponente der Geschwindigkeit am oberen Ende der Öffnung auftreten. Direkt an der Hinterkante der Öffnung befindet sich das Maximum dieser Schwankungen, das allerdings durch ein schmales Gebiet geringerer Aktivität von der erstgenannten Zone getrennt ist. Diese Schwankungen werden verursacht durch einen stark fluktuierenden Strahl, der in den Hohlraum hinein gerichtet ist.

Abb. 4.18 zeigt die y -Komponente der Geschwindigkeit in der Öffnung des Hohlraumes in Abhängigkeit von der Zeit. Es ist sehr gut zu erkennen, dass an der Vorderkante der Öffnung eine Wirbelstruktur entsteht, die dann stromabwärts wandert. Aus dieser Abbildung lässt sich die Konvektionsgeschwindigkeit der Wirbel zu etwa 14 m/s abschätzen. Im Vergleich dazu ergibt das Produkt aus der gemessenen Frequenz der Druckschwankungen und der stromabwärts Länge der Hohlraumöffnung eine Geschwindigkeit von etwa 16 m/s. Diese beiden Werte passen gut der Beobachtung, dass die Frequenz der Schwingung f , die Länge der Öffnung C und die Bezugsgeschwindigkeit u_∞ im Verhältnis

$$fC/u_\infty \approx 1/4$$

stehen [9]. Ashcroft, Takeda und Zhang schätzen die Frequenz der Helmholtz-Mode mit der Formel

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{d'V}}$$

ab [4], wobei S die Öffnungsfläche, d' die effektive Länge der Luftsäule in der Öffnung und V das Volumen des Resonators ist, und kommen auf eine Frequenz von 1850 Hz.

Abb. 4.19 zeigt einen Schnappschuss des Druckfeldes. Zum gezeigten Zeitpunkt herrscht im Resonator selbst ein deutlicher Überdruck, während außerhalb eine sich entfernende Unterdruckwelle zu erkennen ist. Außerdem sind stromab von der Öffnung des Resonators entlang der Wand Druckstörungen zu sehen, die zu den Wirbeln gehören, die in der freien Scherschicht in der Resonatoröffnung entstehen, und deren Wechselwirkung mit der hinteren Kante der Öffnung letztlich zu der Resonatorschwingung führen.

Einfluss der Anströmung auf die Druckschwankungen im Resonator

Im Experiment von Henderson wurde im Resonator in der Mitte der linken Wand der Wechseldruck gemessen (siehe Abb. 4.11, der Sensor befand sich an dem mit „M“ bezeichneten Ort). Die spektrale Leistungsdichte der Druckschwankungen im Helmholtzresonator ist in den Abb. 4.20–4.23 dargestellt, wobei einerseits unterschiedliche Anströmgeschwindigkeiten und Grenzschichtdicken und andererseits jeweils das selbsterstellte Programm mit dem D2Q9-Modell bzw. PowerFLOW mit einem 3d-Modell benutzt wurde.

In nahezu allen Simulationen kam es offenbar zur Ausbildung einer Resonanz verbunden mit einer stark tonalen Druckschwankung im Resonator. In vielen Simulationen ist jedoch der breitbandige Anteil der Druckschwankungen deutlich kleiner als in den Ergebnissen der Windkanalmessung. Der Vergleich der Ergebnisse der Simulationen mit den Windkanalmessungen ist in sofern schwierig, als zu den im Windkanal herrschenden akustischen Bedingungen keine Angaben gemacht werden. Es ist daher schwer einzuschätzen, durch welche Effekte der breitbandige Schall im Frequenzbereich oberhalb und unterhalb der Resonanz erzeugt wird. In Frage kämen

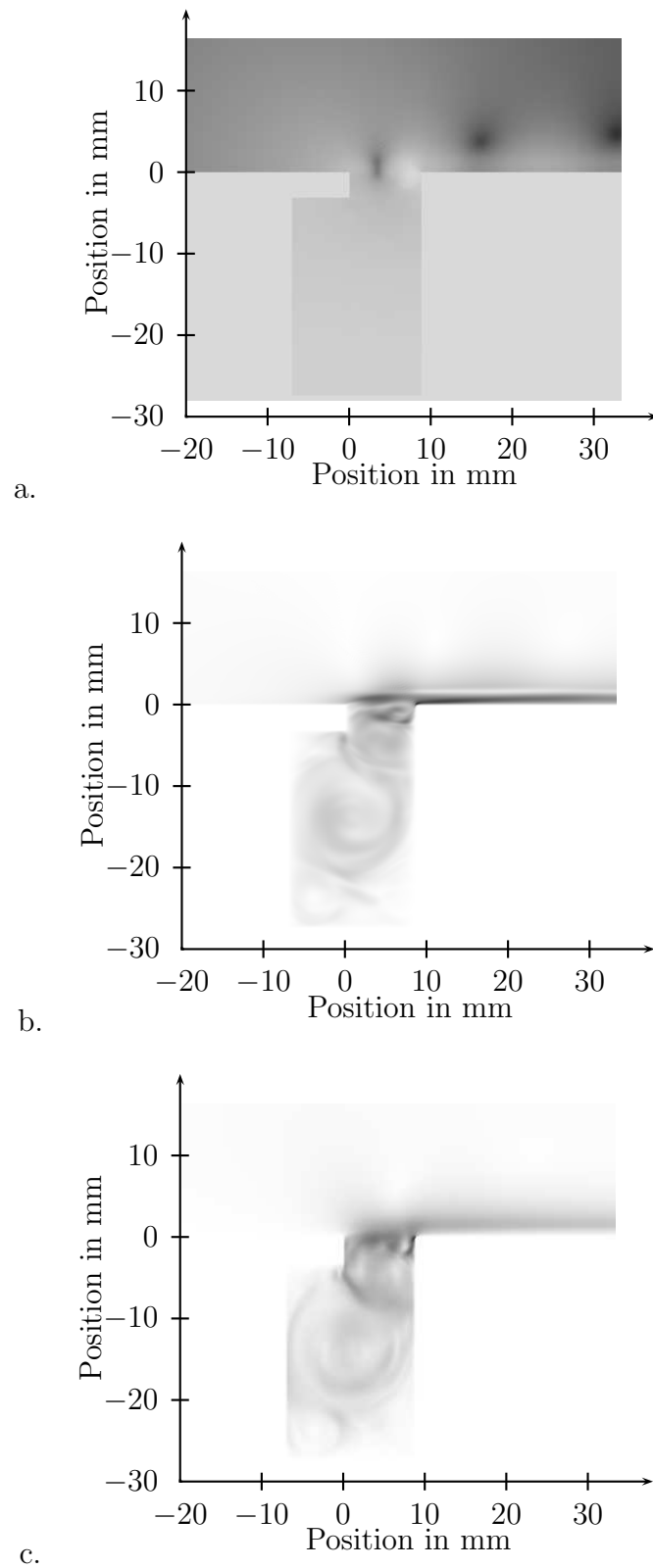
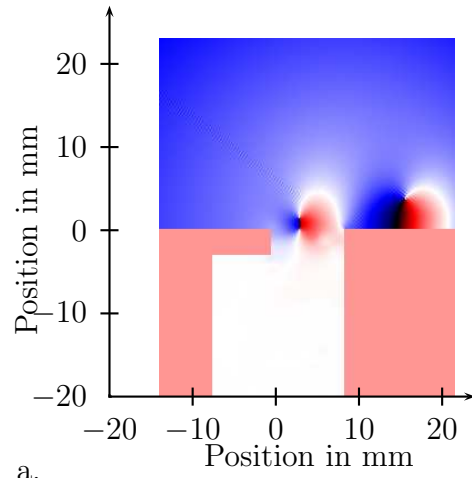
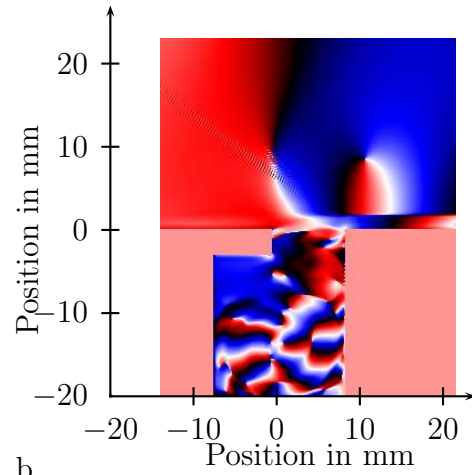


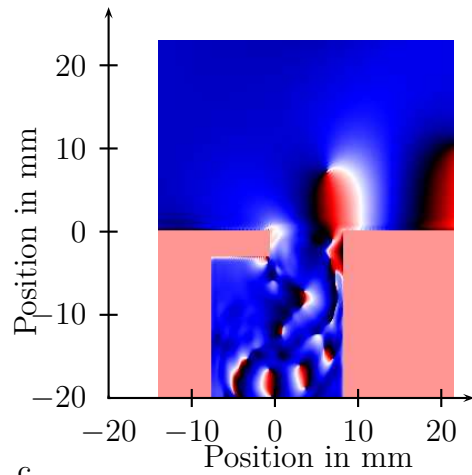
Abbildung 4.16: a: RMS-Druckschwankungen, weiß: 150 dB, schwarz: 100 dB. b: RMS-Schwankungen der x -Komponente der Geschwindigkeit im Hohlraum. Weiß: 0 m/s, schwarz: 10 m/s. c: Wie links, jedoch y -Komponente



a.



b.



c.

Abbildung 4.17: a: Phasenlage $\Delta\phi$ der Druckschwankungen bezogen auf die Druckschwankungen an der Mikrofonposition Weiß: $\Delta\phi = 0$, rot: $\Delta\phi = \pi/2$, blau: $\Delta\phi = -\pi/2$, schwarz: $\Delta\phi = \pi$. b: Phasenlage der Schwankungen der x -Komponente der Geschwindigkeit. c: Phasenlage der Schwankungen der y -Komponente der Geschwindigkeit.

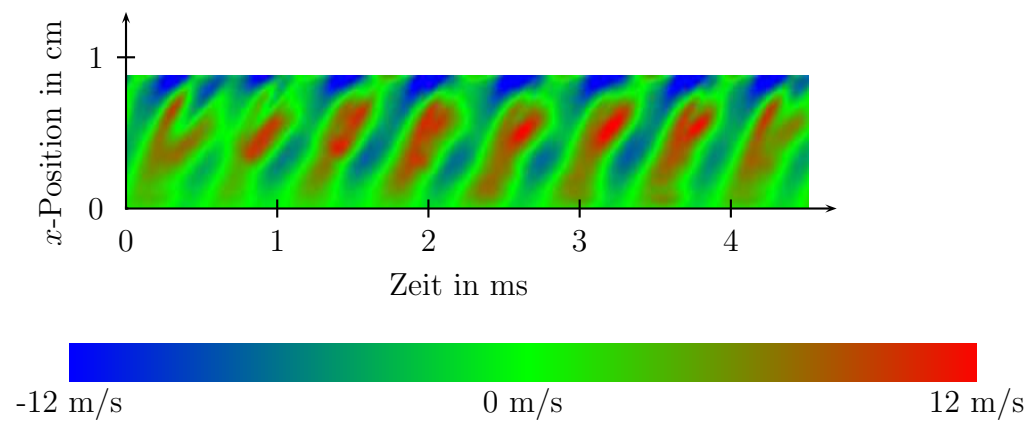


Abbildung 4.18: y -Komponente der Geschwindigkeit in Öffnung des Hohlraumes, rot: 12 m/s, blau: -12 m/s

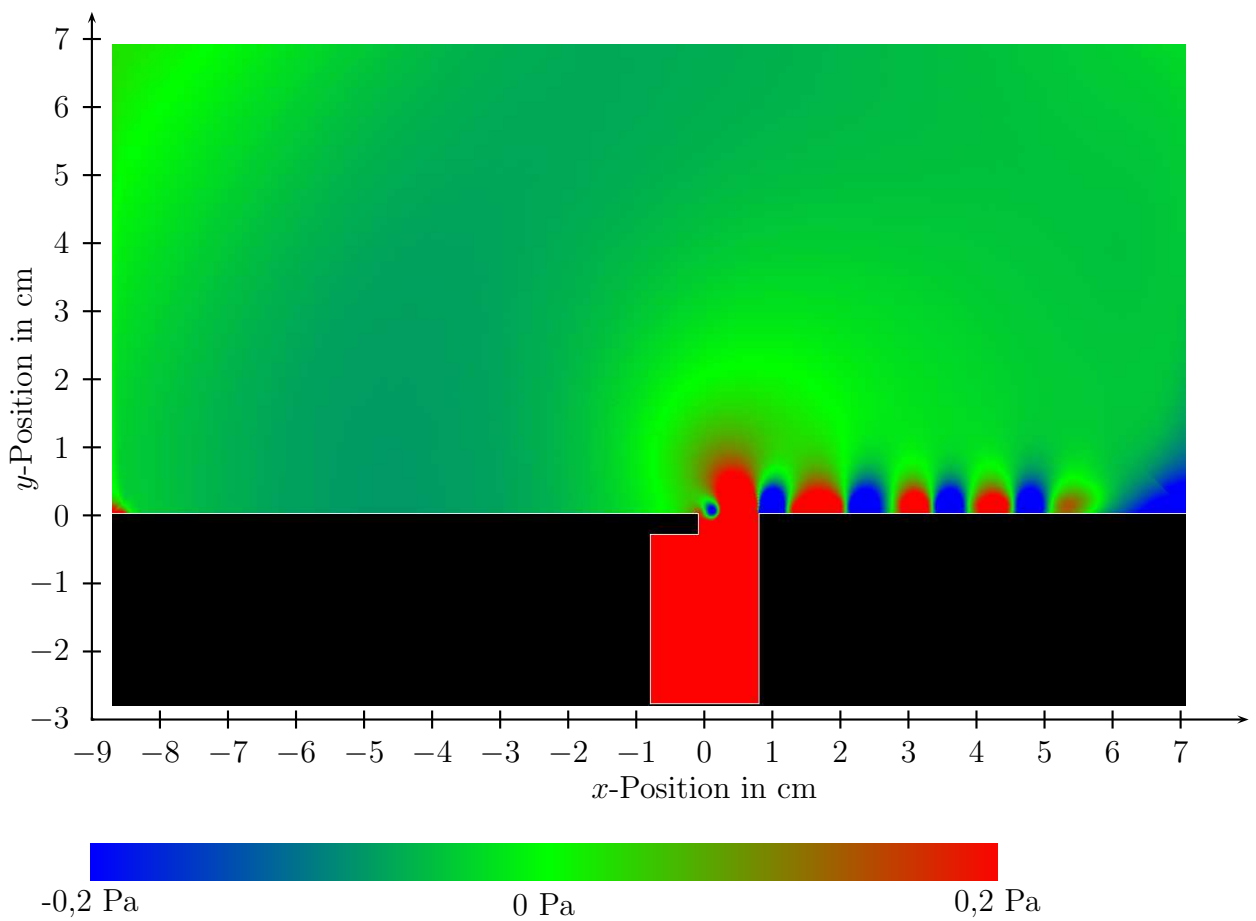


Abbildung 4.19: Schnappschuss des hochpass-gefilterten Druckfeldes, simuliert mit dem D2Q9-LBGK-Modell.

Tabelle 4.3: Wechseldruckpegel und Frequenz der Resonanzschwingung im überströmten Hohlraum

δ [mm]	v_0 [m/s]	Windkanal		D2Q9-LBGK		PowerFLOW	
		f [Hz]	L_p [dB]	f [Hz]	L_p [dB]	f [Hz]	L_p [dB]
12	40	1762	126	1503	119	-	-
12	50	1823	145	1684	134	1889	139
12	60	2085	137	1833	137	1994	146
20	40	1625	111	1574	109	2081	91
20	50	1800	134	1654	128	1838	131
20	60	1999	144	1710	136	1954	144

Daten für Windkanalexperiment aus [27].

- durch Turbulenz erzeugte Druckschwankungen im Strahl des Windkanals oder der Grenzschicht über der Platte,
- durch den Kanal selbst erzeugter Schall,
- Schallwellen, die durch die Wechselwirkung der Turbulenz der Grenzschicht mit Vor- und Hinterkante der Resonatoröffnung erzeugt werden,
- Ausbreitung von turbulenten Schwankungen im Resonatorvolumen.

Die beiden erstgenannten Effekte können durch eine numerische Simulation ohne weitere Angaben naturgemäß nicht reproduziert werden, wogegen die turbulente Grenzschicht und ihre Wechselwirkung mit den Kanten der Resonatoröffnung zumindest prinzipiell nachzubilden sein sollte. In der hier benutzten Simulation wurde jedoch die Grenzschicht bei weitem nicht so fein aufgelöst, dass eine realistische Ausbildung der turbulenten Schwankungsbewegungen in der Grenzschicht zu erwarten wäre. Die Ausbreitung von turbulenten Strukturen (Wirbeln) im Volumen des Resonators ist tatsächlich in der Simulation zu beobachten, und es ist zu vermuten, dass diese Bewegungen zumindest im tieffrequenten Bereich auch zu Druckschwankungen am Ort des Sensors führen. Diese Probleme entstehen nicht für die beobachteten tonalen Schwingungen. Die hohen Pegel von über 120 dB sowie der tonale Charakter lassen andere Ursachen als eine Resonanzschwingung äußerst unwahrscheinlich erscheinen.

Abb. 4.20 zeigt die Spektren der Druckschwankungen im Resonator für verschiedene Geschwindigkeiten und eine Grenzschichtdicke von 12 mm, simuliert mit dem D2Q9-Modell. Zum Vergleich sind die Messergebnisse im Windkanal mit eingetragen. Es zeigt sich, dass bei allen Geschwindigkeiten die Frequenz der Resonanz um ca. 10% zu tief simuliert wird (vergl. auch Tabelle 4.3). Für die Pegel in der Resonanz ist das Bild uneinheitlich: Bei 60 m/s und 40 m/s ist die Übereinstimmung sehr gut bzw. gut zu nennen, während bei 50 m/s eine deutliche Abweichung von ca. 10 dB auftritt. Im Frequenzbereich oberhalb der Resonanzfrequenz von etwa 2 kHz liegen die simulierten Schwankungen generell zu tief. Da auch in dieser Simulation die Turbulenz der Grenzschicht nicht korrekt simuliert werden konnte, ist diese Abweichung zu erwarten.

Für die Simulation mit der 20 mm starken Grenzschicht zeigt sich ein ähnliches Bild (siehe Abb. 4.21). In der Simulation bei $v_0 = 40$ m/s ist die Resonanz in der Simulation wie im Windkanalexperiment sehr schwach ausgeprägt, die Spektren stimmen in der Nähe der Resonanzfrequenz sehr gut überein. Bei den höheren Geschwindigkeiten ist die Resonanzfrequenz

wiederum ca. 10% zu tief. Der Wechseldruckpegel liegt in der Simulation bei 50 m/s um 6 dB, bei 60 m/s um 8 dB zu tief.

Die Ergebnisse mit dem 3d-Modell unter Nutzung von PowerFLOW sind in den Abbildungen 4.22 und 4.23 dargestellt. Hier fällt zunächst auf, dass der breitbandige Anteil der Druckschwankungen in der Simulation deutlich schwächer als in der Windkanalmessung ist. Die möglichen Gründe dafür wurde bereits genannt. Allerdings ist hier eine hervorragende Übereinstimmung der Ergebnisse im Bereich der Resonanzfrequenz zu beobachten, was den Pegel, die Frequenz und die spektrale Breite des Maximums betrifft. Die Simulationen zeigen darüber hinaus mit Ausnahme der Rechnungen bei 40 m/s, wo keine Resonanzschwingung auftrat, ein zweites, lokales Maximum beim Zweifachen der Grundschiwingung. Allerdings sind die Amplituden bedeutend kleiner als bei der Hauptresonanz und liegen in allen Fällen unter dem im Experiment beobachteten, breitbandigen Hintergrundgeräusch. In den Windkanalergebnissen ist für beide Grenzschichtdicken nur bei 50 m/s ein Maximum zu erkennen, dass zur 1. harmonischen der Grundschiwingung zuzuordnen wäre. Die in der Simulation auftretenden Pegel der 1. harmonischen sind jedoch deutlich niedriger als in den Windkanalexperimenten beobachtet.

Die Simulationen mit PowerFLOW wurden für verschiedene räumliche Tiefen des Problems wiederholt, und die Druckschwankungen wurden verglichen. Dabei zeigte sich, dass unterhalb einer räumlichen Tiefe von ca. 5 cm die Frequenzen und Amplituden der Druckschwankungen von der Tiefe unabhängig waren. Bei einer Tiefe von 25 cm nahm die Amplitude der Druckschwankung im Resonator um 20 dB ab. Die Ursache dafür konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden.

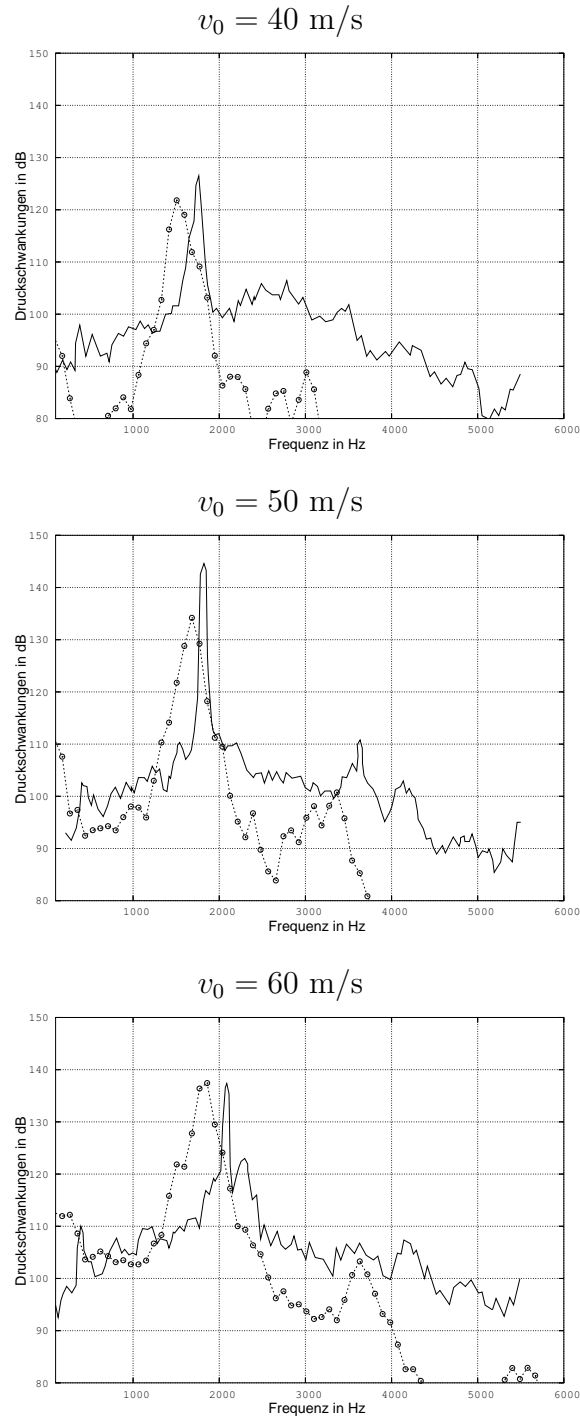


Abbildung 4.20: Spektrum der Leistungsdichte der Druckschwankungen im Resonator bei einer Grenzschichtdicke von 12 mm. Die durchgezogene Linie zeigt die von Henderson gemessenen Werte, die mit „o“ bezeichnete Kurve gibt die Simulationsergebnisse mit dem D2Q9-LBGK-Modell wieder.

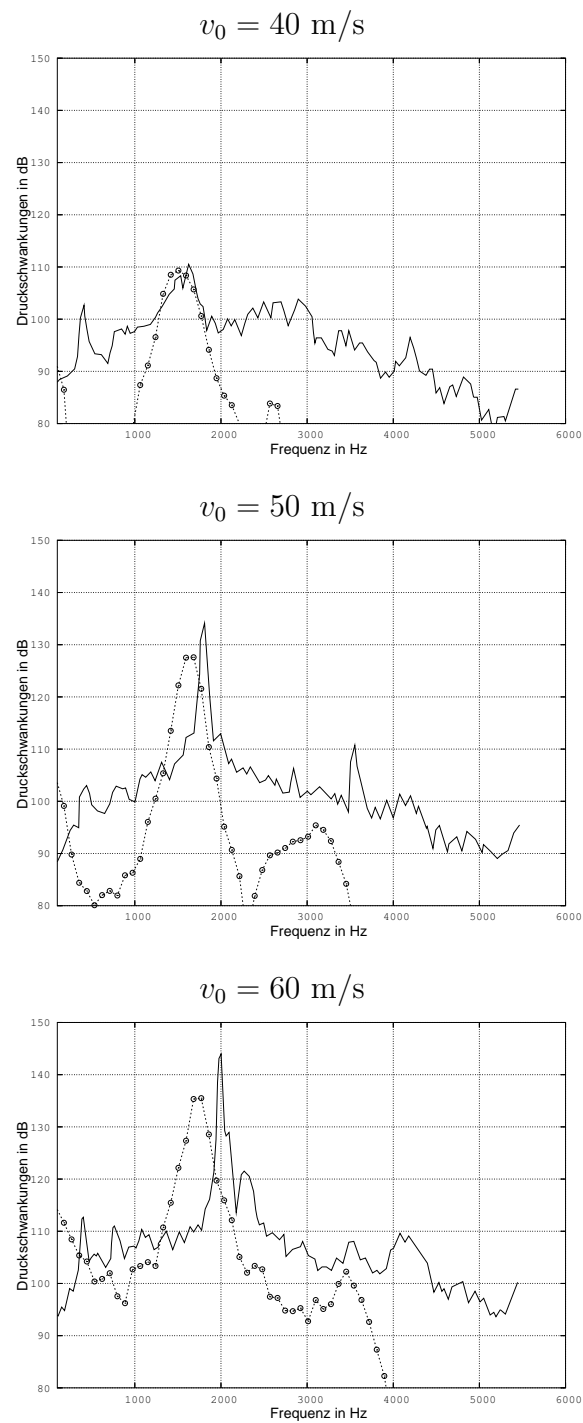


Abbildung 4.21: Spektrum der Leistungsdichte der Druckschwankungen im Resonator bei einer Grenzschichtdicke von 20 mm. Die durchgezogene Linie zeigt die von Henderson gemessenen Werte, die mit „o“ bezeichnete Kurve gibt die Simulationsergebnisse mit dem D2Q9-LBGK-Modell wieder.

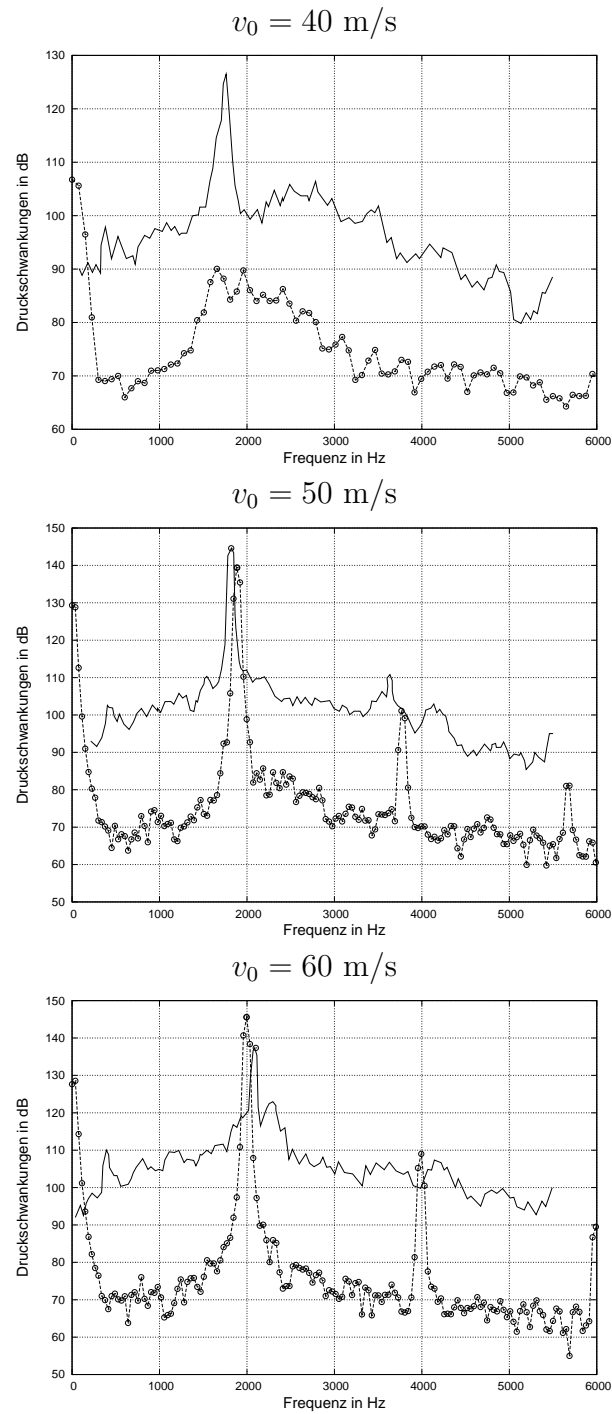


Abbildung 4.22: Spektrum der Leistungsdichte der Druckschwankungen im Resonator bei einer Grenzschichtdicke von 12 mm. Die durchgezogene Linie zeigt die von Henderson gemessenen Werte, die mit „o“ bezeichnete Kurve gibt die Simulationsergebnisse mit PowerFLOW wieder.

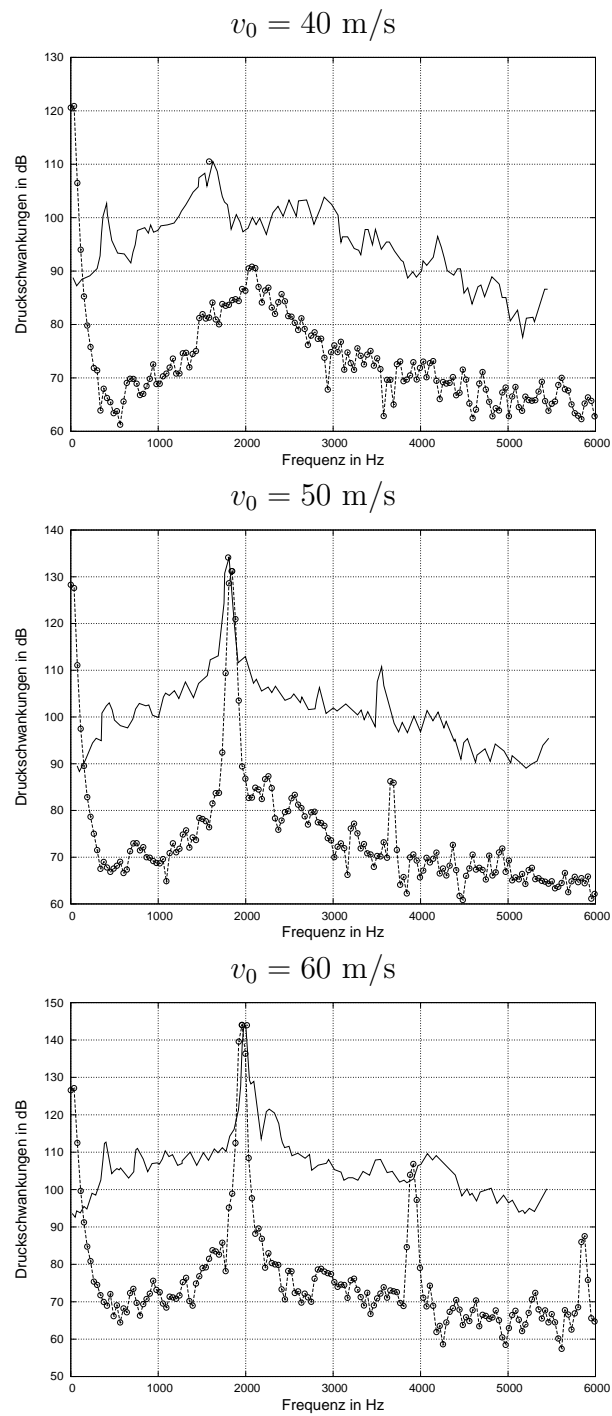


Abbildung 4.23: Spektrum der Leistungsdichte der Druckschwankungen im Resonator bei einer Grenzschichtdicke von 20 mm. Die durchgezogene Linie zeigt die von Henderson gemessenen Werte, die mit „o“ bezeichnete Kurve gibt die Simulationsergebnisse mit PowerFLOW wieder.

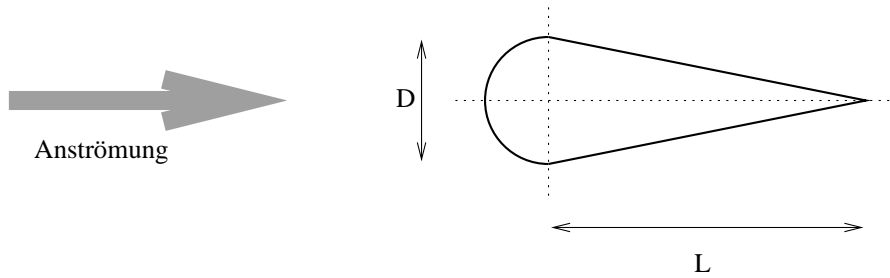


Abbildung 4.24: Querschnitt des Strömungskörpers. Das Verhältnis von Länge des Heckdreikantes L zu Durchmesser des Halbzylinders D nahm die Werte 2,5; 3; 5 an.

4.3 Halbzylinder mit Dreikantaufsatz

Für das Projekt Akusim wurden ein Testproblem definiert, dass in der Berechnung der Schallerzeugung bei der Umströmung eines Halbzylinders mit angeschlossenem Heckdreikant bestand. Der Halbzylinder hat einen Radius von 1 cm. Es wurde vermutet, dass unterhalb einer bestimmten kritischen Länge des Heckdreikantes sich eine tonale Schallerzeugung durch regelmäßige Wirbelablösung einstellen würde. Überschreitet die Länge des Heckdreikantes jedoch einen kritischen Wert, so sollte es nicht mehr zur Ausbildung einer Kármán'schen Wirbelstraße und damit zu einer breitbandigen Schallerzeugung kommen. Dieser Testfall wurde sowohl numerisch als auch experimentell bearbeitet [51, 60, 2, 62]. Die numerischen Experimente wurden einerseits am DLR mit Hilfe der Programme FLOWER und Piano und andererseits durch den Autor mit Hilfe des Programmes PowerFLOW durchgeführt. Das Windkanalexperiment wurde am aeroakustischen Windkanal des Instituts für Akustik und Sprachkommunikation der TU Dresden vorgenommen.

4.3.1 Beschreibung des Experimentes

Die Geometrie des Versuchskörpers ist in Abb. 4.24 dargestellt. Auf der rückwärtigen Seite eines Halbzylinders mit einem Durchmesser von 2 cm befand sich ein Heckdreikant, dessen Länge unterschiedlich gestaltet werden konnte. Der Strömungskörper hatte in Spannweitenrichtung eine Ausdehnung von 12 cm, die Enden waren von Hand abgerundet. Am Übergang vom Halbzylinder zum Dreikant ist eine scharfe Kante, die als geometrische Unstetigkeit einen Abriss der Strömung an dieser Stelle provozieren sollte. Die Geschwindigkeit der anströmenden Luft betrug 34 m/s. Da im Experiment die Ausrichtung des Strömungskörpers nur bis auf ca. 1° genau eingestellt werden konnte, wurde im numerischen Experiment ein Anstellwinkel von $0,5^\circ$ gewählt.

Bei der Konzeption des Experimentes ging man davon aus, dass es bei einem im Verhältnis zum Halbzylinderdurchmesser kurzen Heckdreikant (z. B. $L/D < 1$) zur Ausbildung einer Kármán'schen Wirbelstraße, d.h. regelmäßiger Wirbelablösung und damit zu einer weitgehend tonalen Schallerzeugung kommt, während bei größeren L/D -Verhältnissen eine voll turbulente Strömung entsteht, die eine breitbandige Schallabstrahlung bewirkt. Vorsimulationen mit verschiedenen L/D ergaben, dass der Übergang von einer regelmäßigen Wirbelablösung zur voll turbulenten Strömung etwa im Bereich $L/D \approx 3$ liegen würde. Aus diesem Grunde wurden die Fälle $L/D = 2, 5; 3; 4; 5$ betrachtet.

Beim Windkanalexperiment am Institut für Akustik und Sprachkommunikation der TU Dresden wurden im Strömungskörper an verschiedenen Stellen Druckaufnehmer platziert, um

die Druckschwankungen auf der Oberfläche des Strömungskörpers zu messen. Mit Hitzdrahtsonden wurde das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung des Strömungskörpers erfasst. Die Schallabstrahlung konnte mit Mikrofonen aufgenommen werden, die mit einem Abstand von 330 mm auf einem Kreis um die Hinterkante des Strömungskörpers angeordnet waren. Der aeroakustische Windkanal am Institut für Akustik und Sprachkommunikation der TU Dresden verfügt über einen Freistrahls mit kreisförmigem Querschnitt und einem Düsendurchmesser von 20 cm. Bei einer Reihe von Windkanalmessungen wurde die Grenzschicht um den Strömungskörper mit Hilfe eines kleinen zusätzlich aufgebrachten Hindernisses mit 0,3 mm Höhe (trip-Streifen) am Übergang zwischen Halbzylinder zu Heckdreikant gestört, um den Abriss der Strömung zu erzwingen.

Im numerischen Experiment wurde der Strömungskörper dreidimensional simuliert. Bei einer Serie von Rechnungen wurden die abgerundeten Endstücke nachgebildet, in dem an den Halbzylinder eine Viertelkugel und an den Dreikant ein entsprechender Kegel mit halb-kreisförmiger Grundfläche angeschlossen wurde. Diese Endstücke entsprechen nicht genau der Geometrie des im Windkanal benutzten Strömungskörpers. Zusätzlich wurde die Anströmung variiert, in dem einerseits eine unendlich ausgedehnte, homogene Anströmung mit $u_\infty = 34$ m/s und andererseits der im Windkanalexperiment tatsächlich benutzte Freistrahls mit kreisförmigem Querschnitt, 200 mm Durchmesser mit gleicher Strömungsgeschwindigkeit simuliert wurde. Auf die Simulationsergebnisse hatte dies jedoch ebenso wie die Konfiguration mit und ohne Endstücksnachbildung keinen wesentlichen Einfluss.

Ebenso wie bei der Simulation des überströmten Hohlraumes kamen hier ein Turbulenzmodell und ein Wandmodell zum Einsatz. Die Randbedingungen wurden hier wie folgt gewählt: In der Einströmebene wurde eine konstante Geschwindigkeit von 34 m/s vorgegeben, an den übrigen Randflächen und insbesondere am Ausströmrand wurde Normaldruck erzwungen. Die mit dem Durchmesser des Halbzylinders gebildete Reynoldszahl betrug ca. 45000.

Auch bei diesem Experiment war eine lokale Gitterverfeinerung notwendig, um einerseits einen genügend großen Teil des Strömungsfeldes um den Körper herum abzubilden und andererseits die Bereiche in unmittelbarer Nähe des Körpers genügend fein aufzulösen. Dabei wurde die feinste Vernetzung im Bereich des Überganges von Halbzylinder zum Heckdreikant platziert, weil hier die größten Gradienten im Strömungsfeld zu erwarten sind. In diesem Bereich entsprach die Gitterschrittweite $1/70$ des Zylinderdurchmessers, was einem Δx von 0.286 mm entspricht. Diese Gebiete sehr feiner Vernetzung auf der Ober- und Unterseite des Strömungskörpers waren eingebettet in Gebiete mit einer doppelt so großen Gitterweite, welche wiederum in gröber aufgelöste Gebiete eingebettet waren usw.. Insgesamt wurden so 8 Verfeinerungsstufen erreicht, d.h. die größte Auflösung betrug schließlich $\Delta x = 73,1$ mm. Das gesamte Rechengebiet hatte eine Ausdehnung von $1600 \times 1020 \times 1000$ mm³. Zur Beschreibung der Geometrie wurde ein kartesisches Koordinatensystem gewählt, dessen x -Achse in Strömungsrichtung zeigt und dessen y -Achse annähernd normal zur Profilebene ist. Die z -Achse zeigt in Spannweitenrichtung parallel zur Achse des Zylinders. Der Ursprung liegt im Zentrum des zum Vollzylinder ergänzten Halbzylinders.

4.3.2 Ergebnisse

In Voruntersuchungen wurden zeitgemittelte Strömungsfelder berechnet, um die zu untersuchenden L/D -Verhältnisse für die Windkanalexperimente festzulegen. Abb. 4.25 zeigt den Betrag der zeitgemittelten Geschwindigkeit bei $z=0$ für ein Profil mit $L/D = 2,5$. Zusätzlich sind Stromlinien eingezeichnet. Es ist deutlich erkennbar, dass die Strömung an der Hinterkante des

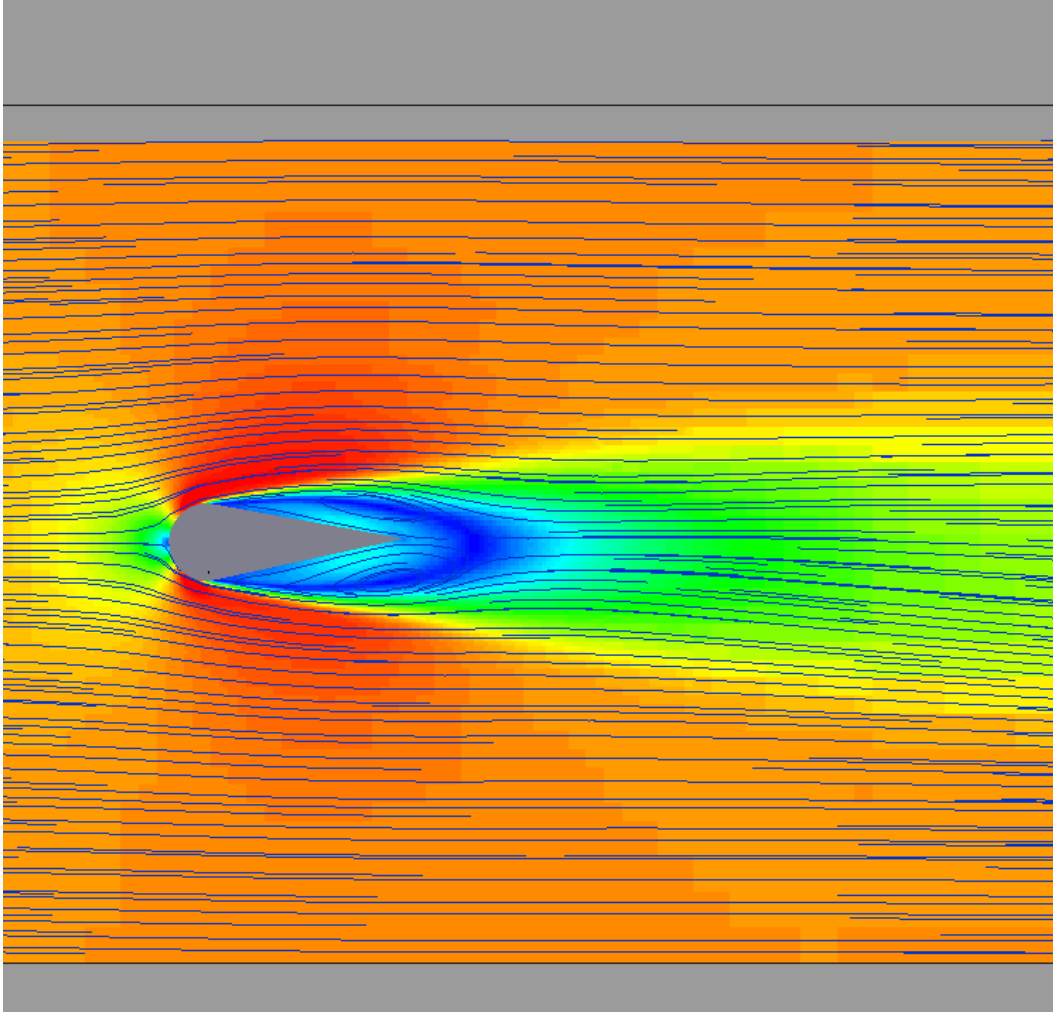


Abbildung 4.25: Betrag der zeitgemittelten Geschwindigkeit bei $z=0$. Rot: $|\vec{v}| = 40$ m/s, blau: $|\vec{v}| = 0$ m/s.

Halbzylinders ablöst und es zur Ausbildung einer Rückströmung in der Nähe der Profiloberfläche kommt. Das Rezirkulationsgebiet dehnt sich bis hinter die Hinterkante des Dreikantes aus, so dass ein freier Staupunkt hinter dem Profil entsteht. Aufgrund dieser Tatsache wurde vermutet, dass es in diesem Fall zur Ausbildung einer Kármán'schen Wirbelstraße kommen würde.

Die numerischen Simulationen der instationären, dreidimensionalen Strömung ergaben zunächst, dass die Strömung auch bei $L/D = 2,5$ weniger ausgeprägt periodisch ist als ursprünglich angenommen.

Abb. 4.26 zeigt aus einer Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes berechnete Stromlinien sowie den Betrag der Geschwindigkeit bei $x=150$ mm. Bei dieser Simulation wurde die Konfiguration mit Simulation des Freistrahls und abgerundeten Endstücken genutzt. Anhand der Stromlinien ist keine regelmäßige Strömungsstruktur zu erkennen. Es zeigt sich, dass das gesamte Strömungsfeld im Bereich des Profils offenbar nicht in Spannweitenrichtung konstant ist. Bei $x = 150$ mm ist hinter dem Profil eine deutliche Absenkung der Geschwindigkeit zu beobachten, wobei die Isolinen der Geschwindigkeit eher kreisförmig sind. Damit reflektieren

sie nicht das Verhältnis von Spannweite zu Durchmesser von 6:1, das das Profil tatsächlich hatte. Allerdings ist bei $x = 150$ mm die räumliche Auflösung bereits sehr grob, so dass feine Strukturen nicht mehr aufgelöst werden können. Die grobe Auflösung könnte unter Umständen auch das Ergebnis verfälschen.

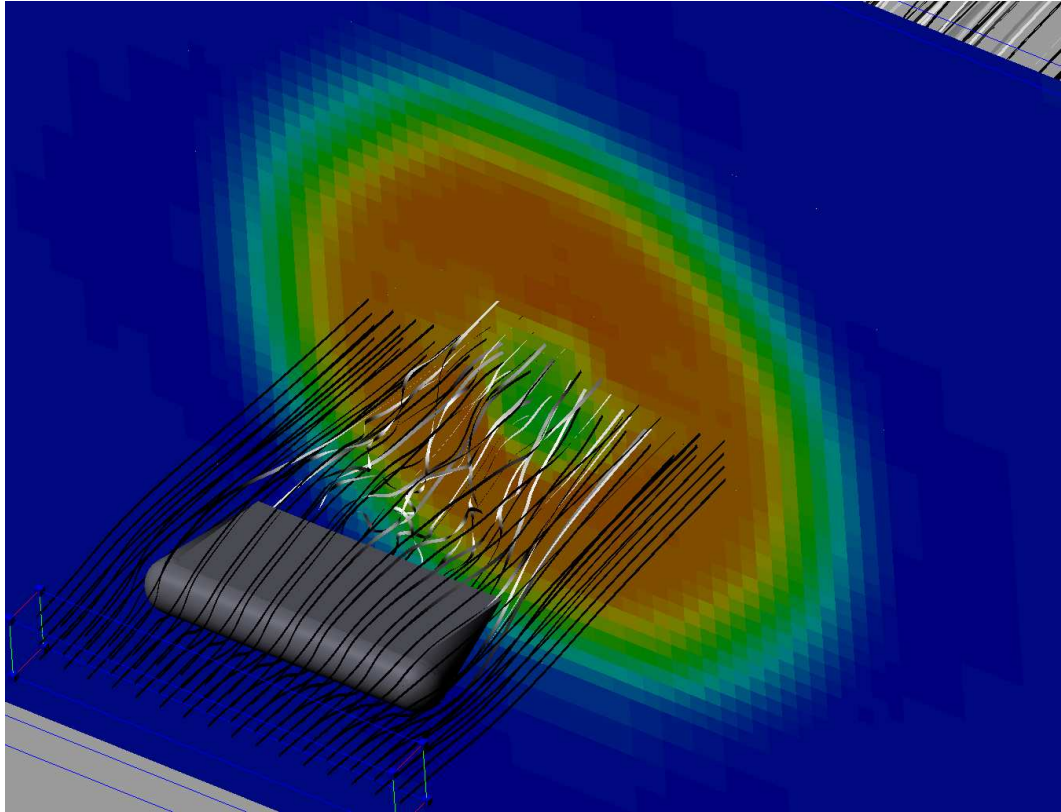


Abbildung 4.26: Aus einer Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes berechnete Stromlinien für die Simulationskonfiguration $L/D = 2,5$, mit abgerundeten Endstücken und Simulation des Freistrahles.

Abb. 4.27 zeigt die Isoflächen der y -Komponente der momentanen Geschwindigkeit für $v_y = 8$ m/s in rot und $v_y = -8$ m/s in blau, sowie den Betrag der Geschwindigkeit bei $x = 150$ mm für die gleiche Simulation wie in Abb. 4.26. Die Strömung zeigt in alle Raumrichtungen erhebliche Variabilität.

Abb. 4.28 zeigt für $L/D = 2,5$ die Isofläche der z -Komponente der Vorticity bei -5000 s $^{-1}$ sowie den Betrag der momentanen Geschwindigkeit in der $y = 0$ -Ebene. Offenbar entsteht keine über die Spannweite des Profils konstante Strömung, vielmehr bilden sich einzelne Turbulenzschläuche, die ihren Anfang an mehr oder weniger zufälligen spannweitigen Positionen an der Kante des Halbzylinders haben und sich stromab ausdehnen. Die spannweiteige Position der Anfangspunkte der Turbulenzschläuche ist langsam veränderlich, d.h. Änderungen sind nur in Zeiträumen $\Delta t \gg D/u_\infty$ feststellbar. Von der Untersuchung an quer angeströmten Vollzylindern ist bekannt, dass die Umströmung dort nur bis etwa zu einer Reynoldszahl von $200 - 300$ in axialer Richtung konstant ist [49]. Bei höheren Reynoldszahlen kommt es offenbar zur Ausbildung von starken Instabilitäten in Achsenrichtung, so dass die axiale Kohärenz der Strömung zusammenbricht. Da die Reynoldszahl in diesem Experiment weitaus größer ist, erscheint die Entstehung einer in alle Raumrichtungen variablen Strömung also nicht überraschend.

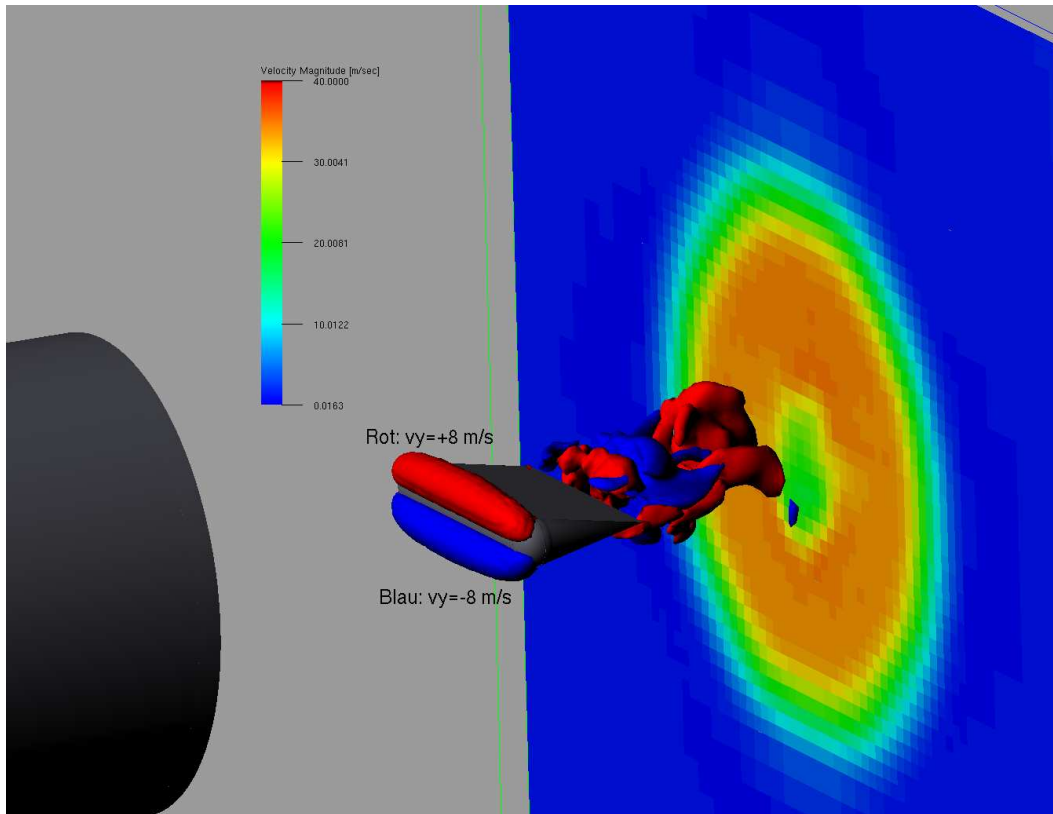


Abbildung 4.27: Isoflächen der Geschwindigkeitskomponente normal zum Profil, rot: $v_y = 8 \text{ m/s}$, blau: $v_y = -8 \text{ m/s}$. Die turbulenten Strömungsstrukturen sind dreidimensional.

Abb. 4.29 zeigt die aus dem instantanen Geschwindigkeitsfeld berechneten Stromlinien direkt auf der Oberfläche des Strömungskörpers (rot) und in der Grenzschicht (blau). Sowohl auf der Oberseite als auch auf der Unterseite bilden sich auf der Oberfläche Wirbelsysteme aus. Dabei befindet sich über der Oberfläche spannweitig in Profilmitte ein Rückströmungsgebiet. Die Zentren der Wirbel sind etwa 10 mm von den spannweitigen Enden des Profils entfernt. Diese auf der Profiloberfläche relativ weit ausgedehnten kohärenten Strukturen finden in größerer Entfernung zur Oberfläche keine Entsprechung. Zwar verlaufen die Stromlinien zum Teil durchaus „in Schleifen“, vergleichbar große zusammenhängende Strukturen sind jedoch nicht zu erkennen.

Die entsprechenden Visualisierungen der Simulationsergebnisse bei anderen Verhältnissen von L/D zeigen qualitativ ähnliche Ergebnisse. Aufgrund dieser Struktur der Strömung liegt die Vermutung nahe, dass der durch die Umströmung erzeugte Schall weitgehend breitbandig ist, d.h. tonale Komponenten wenn überhaupt dann nur sehr schwach ausgeprägt sind.

Bei den Experimenten im Windkanal stellte sich heraus, dass die mit Mikrofonen gemessenen Schalldruckpegel im Abstand von 330 mm durchweg breitbandig deutlich unter 70 dB lagen [1]. Wie schon bei der Simulation des überströmten Hohlraumes zeigte sich jedoch auch hier, dass das durch die Quantisierung der Dichte mit 16-bit-Zahlen verursachte breitbandige Rauschen so stark war, dass die simulierten Zeitserien des Druckes an den Positionen der Mikrofone nicht ausgewertet werden konnten, da der Rauschpegel mit ca. 70 dB deutlich über dem zu erwartenden Nutzsignal lag.

An verschiedenen Positionen auf der Oberfläche des Profils wurden sowohl in der Simulation als auch im Windkanalexperiment die Druckschwankungen als Funktion der Zeit aufgenommen.

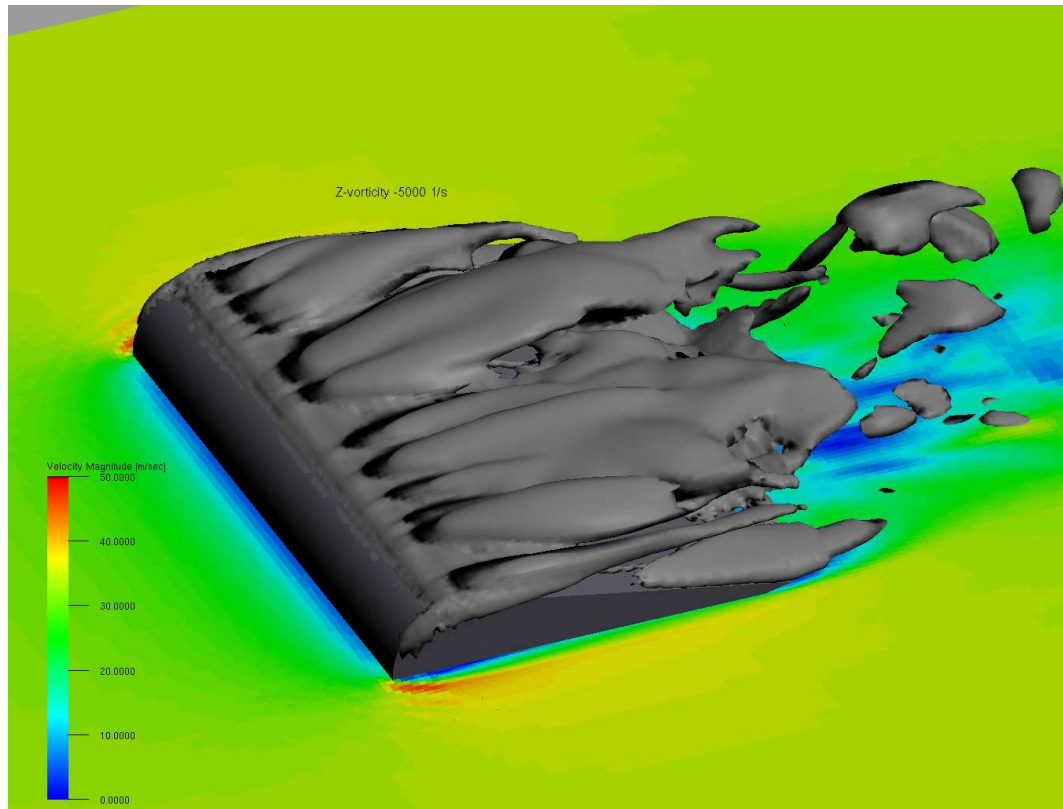


Abbildung 4.28: Isofläche der z -Komponente der Vorticity (z : Spannweitenrichtung), sowie Betrag der Geschwindigkeit in der Mittelebene des Profils.

Die Positionen der Aufnehmer sind Abb. 4.30 zu entnehmen. Die Messungen wurden im Windkanal in der Profilkonfiguration mit bzw. ohne trip-Streifen durchgeführt. Bei den Messungen mit trip-Streifen wurde eine tonale Komponente in den Wanddruckschwankungen bei etwa 130 Hz gefunden, die nicht vorhanden war, wenn die trip-Streifen entfernt wurden. Da die Dicke der Grenzschicht in der Simulation eher den Messergebnissen in der Profilkonfiguration ohne trip-Streifen entspricht, wird im Folgenden nur auf die Windkanalergebnisse mit dieser Profilkonfiguration Bezug genommen. In den Spektren der Wanddruckschwankungen ist neben den breitbandigen Schwankungen bei 300 Hz eine schwach ausgeprägte tonale Komponente zu erkennen, die sich um ca. 5 dB vom Rauschen abhebt (siehe Abb. 4.31). Bis herauf zu einer Frequenz von 400 Hz stimmen die Ergebnisse des Windkanalexperimentes und der Simulation gut überein. Während die spektrale Leistungsdichte der Wanddruckschwankungen im Windkanalexperiment oberhalb von 400 Hz mit ca. 6 dB pro Oktave abnimmt, findet sich in den Simulationsergebnissen eine Überhöhung von ca. 5 dB bei 650 Hz.

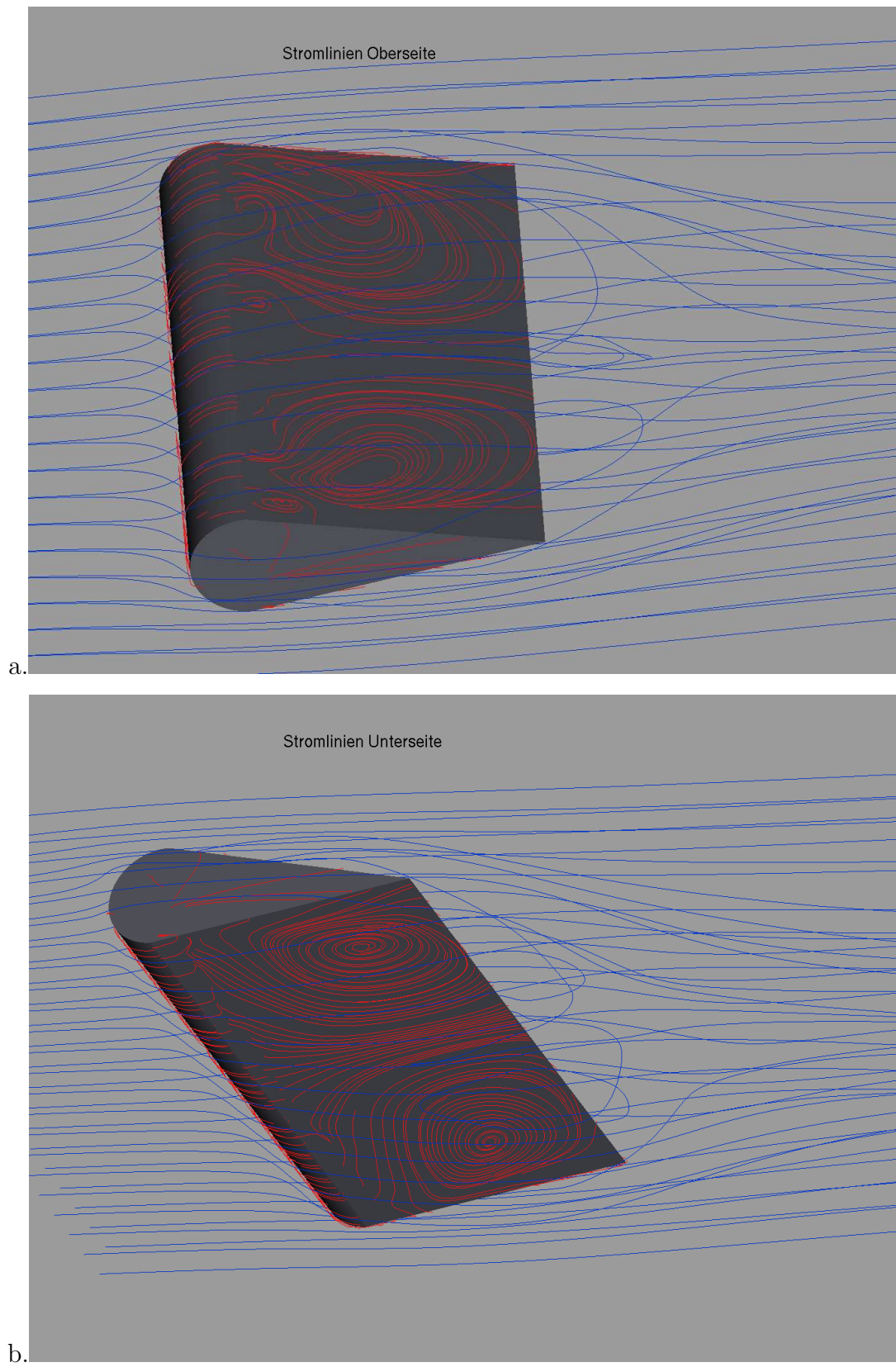


Abbildung 4.29: Stromlinien auf der Oberfläche des Profils, a: Oberseite, b: Unterseite

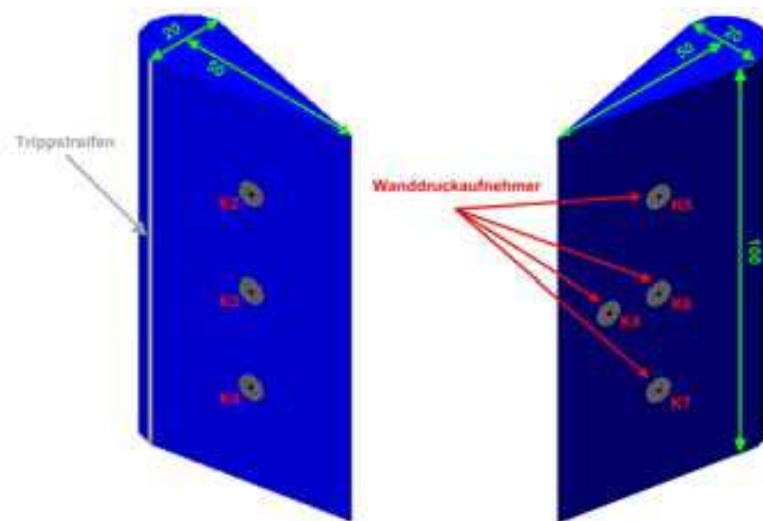


Abbildung 4.30: Positionen der Wanddruckaufnehmer, Abbildung entnommen aus [2].

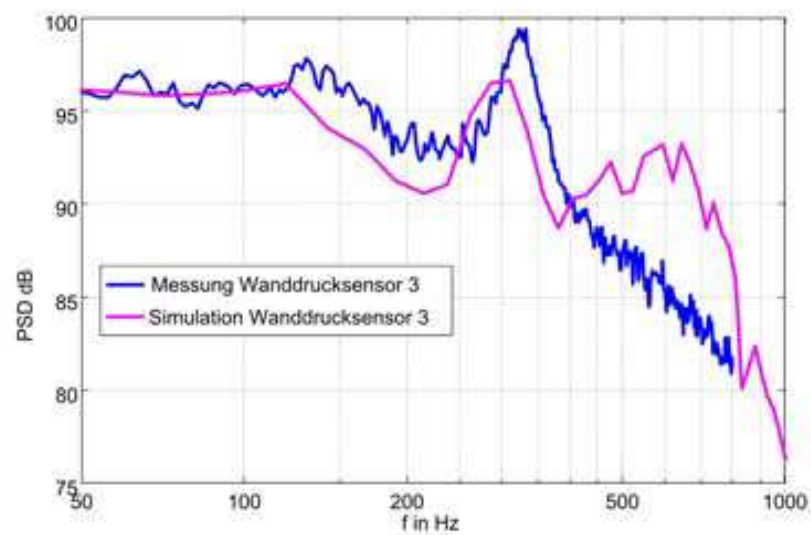


Abbildung 4.31: Spektrale Dichte der Wanddruckschwankungen am Halbzylinder mit $L/D = 2,5$, Ergebnis der Windkanalmessung und der Simulation mit PowerFLOW aus dieser Arbeit, Abbildung entnommen aus [2].

Kapitel 5

Diskussion und Ausblick

5.1 Dispersion und Dissipation

Im ersten Teil der Arbeit wurden numerische Aspekte der Beschreibung von Schallwellen mit Lattice-Boltzmann-Verfahren untersucht. Bei fast allen numerischen Verfahren, die mit räumlichen Diskretisierungen des Ausbreitungsmediums arbeiten, treten durch die numerischen Diskretisierungsverfahren Fehler auf, die sich in Abhängigkeit von der Auflösung des Verfahrens als zusätzliche numerisch bedingte Dispersion bzw. Dissipation äußern¹. Ein einfaches und in der Praxis hilfreiches Maß für diese numerisch bedingten Fehler ist die Anzahl der Gitterpunkte pro Wellenlänge, mit denen eine Schallwelle aufgelöst sein muss, damit ein bestimmtes Fehlerkriterium nicht überschritten wird. In dieser Arbeit wird die Abweichung der Phasengeschwindigkeit bzw. der Viskosität vom Sollwert genutzt, der sich in der Regel bei $k = 0$, also unendlich vielen Gitterpunkten pro Wellenlänge, einstellen sollte. Da bei den Lattice-Boltzmann-Verfahren die zeitliche Auflösung eindeutig von der räumlichen Auflösung abhängig ist, können anders als z.B. bei den Finite-Differenzen-DRP-Verfahren die zeitliche und die räumliche Auflösung nicht getrennt betrachtet werden, was die Fehlerbetrachtung vereinfacht, da die Diskretisierung nur durch eine unabhängige Variable beschrieben wird.

In dieser Arbeit wurde das Lattice-Boltzmann-Verfahren in verschiedenen Varianten linearisiert und der Dispersionsfehler mit Hilfe einer numerisch durchgeführten von-Neumannanalyse bestimmt, weil die Herleitung von Formeln für die o.g. Modellfehler nicht analytisch möglich ist. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen, dass mit Hilfe von Lattice-Boltzmann-Verfahren wesentliche Effekte korrekt beschrieben werden können:

- Ausbreitung von Schallwellen in ruhendem Medium
- Konvektion von Schallwellen in nicht ruhendem Medium (Doppler-Effekt)

Abgesehen von der Möglichkeit, die zweite Viskosität zu beeinflussen, unterscheiden sich in Bezug auf die akustischen Eigenschaften die Lattice-Bhatnagar-Gross-Krook- und die Multiple-Relaxation-Time-Verfahren nicht wesentlich. Es zeigt sich, dass im ruhenden Medium eine Schallwelle mit mindestens ca. 10 Punkten pro Wellenlänge aufgelöst werden muss, damit die Phasengeschwindigkeit der Welle im numerischen Modell nicht um mehr als 1 % von der gewünschten Schallgeschwindigkeit abweicht. Legt man die Fehlerschranke auf 0,1 %, so

¹Eine Ausnahme ist z.B. das eindimensionale Transmission Line Matrix-Verfahren, dass aber für die hier betrachtete Problemklasse keine Rolle spielt

vergrößert sich dieser Wert auf ca. 30 Punkte pro Wellenlänge. Dieser Wert ist zu vergleichen mit den Werten, die moderne Dispersion Relation Preserving-Verfahren (DRP) erreichen [55, 54, 58, 7]. Mit den DRP-Verfahren kann die Auflösung auf 6 Punkte pro Wellenlänge reduziert werden, ohne dass die Phasengeschwindigkeit mehr als 1 % vom Sollwert abweicht. Bei Finite-Differenzen-Verfahren, zu denen sowohl die Lattice-Boltzmann-Verfahren als auch die DRP-Verfahren gehören, geht die Auflösung in der Potenz der betrachteten Dimensionalität in den Simulationsaufwand ein, wobei die Zeit aufgrund der zu erfüllenden Courant-Levy-Friedrichs-Bedingung als Dimension mit eingeht. Bezeichnet N die Anzahl der Gitterpunkte auf einer typischen Länge des Problems, so ist für zweidimensionale Probleme der Aufwand einer Simulation also etwa $\propto N^3$, während für dreidimensionale Probleme der Aufwand mit $\propto N^4$ steigt. Legt man ein Verhältnis von 6:10 zugrunde, so ergibt sich, dass mit DRP-Verfahren bei zweidimensionalen Problemen etwa fünfmal weniger Gitterpunkte benötigt werden als mit Lattice-Boltzmann-Verfahren, bei dreidimensionalen Problemen beträgt der Faktor sogar 8. Aufgrund dieser Zahlen ist klar, dass die Lattice-Boltzmann-Verfahren aufgrund ihrer geringeren Effizienz bei Simulationen, bei denen große Volumina diskretisiert werden müssen, im Vergleich zu DRP-Verfahren nicht konkurrenzfähig sind. Diese Aussage muss jedoch in der Praxis relativiert werden, weil bei strömungsakustischen Problemen häufig stark unterschiedliche Längenskalen eine Rolle spielen, d.h. das Verhältnis von Längenskalen der Strömung zu den Wellenlängen des abgestrahlten Schalls etwa gleich bzw. proportional der Mach-Zahl ist. In der Nähe eines instationär umströmten Körpers muss die Auflösung daher weit feiner gewählt werden, um die relevanten Strömungsstrukturen aufzulösen, während weiter weg nur noch die akustischen Schwankungen aufgelöst werden müssen. Da aber in der Praxis die Berechnung von Fernfeldern, wo nur noch rein akustische Schwankungen vorliegen, zumeist unter Ausnutzung von Randelement-Verfahren, z.B. über die Lösung der Kirchhoff- oder Ffowcs-Williams-Hawkings-Gleichung vorgenommen werden, wird in vielen Fällen die Anzahl der benötigten Gitterpunkte eher durch das strömungsmechanische als durch das akustische Problem diktiert werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Reihe von Aspekten numerischer Strömungssimulationen nicht betrachtet. Dazu gehören die Wirkung von Gitterverfeinerungen, Turbulenzmodellen, gekrümmten Gittern usw.. Während gekrümmte Gitter in der praktischen Anwendung von Lattice-Boltzmann-Verfahren eher unüblich sind, werden sowohl Turbulenzmodelle als auch die Technik der Gitterverfeinerung über Verdopplung der Auflösung mit Interpolation oft genutzt. Turbulenzmodelle sollten nur in Bereichen wirksam werden, wo zu erwarten ist, dass ein signifikanter Anteil der Energie der Strömung in Strukturen kleiner als die lokale Gitterauflösung enthalten ist. Da die Längenskala der Schallwellen etwa um den Faktor Ma^{-1} größer ist als die Längenskala der sie erzeugenden hydrodynamischen Schwankungen, sollten Turbulenzmodelle nur geringen Einfluss auf die akustischen Eigenschaften eines Verfahrens haben. Ebenso sollten Gitterverfeinerungen, die in Strömungssimulationen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren oft genutzt werden, nur geringen Einfluss auf die Ausbreitung von Schallwellen haben, solange das gröbere Gitter aufgrund seiner Auflösung eine fehlerarme Ausbreitung von Schallwellen zulässt. Von erheblicher Bedeutung ist allerdings die Untersuchung von Gitterverfeinerungen, wenn das gröbere Gitter weniger als 10 Punkte pro Wellenlänge für eine aus dem feineren Gitter einlaufende Schallwelle zur Verfügung stellt. Dann sind Dämpfungserscheinungen, Phasenfehler und Reflexionen möglich und wahrscheinlich. Während Dämpfungserscheinungen und Phasenfehler nur das Ergebnis auf dem groben Gitter verfälschen würden, hätten Reflexionen einen negativen Einfluss auf das Ergebnis auf dem feinen Gitter. In sofern wäre eine Untersuchung solcher Effekte in Zukunft sehr sinnvoll.

Die Schallgeschwindigkeit in Lattice-Boltzmann-Verfahren ergibt sich durch Vergleich mit der Maxwell-Verteilung zu $c = \sqrt{RT}$ [25]. Nourgaliev et al. weisen darauf hin, dass diese Tatsache zu der unsinnigen Forderung führt, dass die Partikel im Lattice-Boltzmann-Modell unendlich viele Freiheitsgrade haben müssen [47]. Hieraus leiten Nourgaliev et al. den Vorschlag ab, die Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Lattice-Boltzmann-Modellen „Pseudo-Schallgeschwindigkeit“ nennen. Desweiteren wird aus Stabilitätsbetrachtungen gefolgert, dass Simulationen von akustischen Problemen mit Lattice-Boltzmann-Verfahren nicht sinnvoll möglich sind. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit kann dazu folgendes gesagt werden: Die Forderung, dass die Schallgeschwindigkeit sich wie $s = \sqrt{\gamma RT}$ verhält, mit $\gamma = c_p/c_v = 1 + (2/D)$, wobei D die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet, sprengt zweifellos den Rahmen der Modellbildung in Lattice-Boltzmann-Verfahren. Insofern ist der Hinweis, dass hier von der Modellbildung der kinetischen Theorie abgewichen wird, korrekt. Allerdings ist durch die Reduktion des Impulsraumes auf eine kleine Anzahl von diskreten Zuständen offensichtlich, dass der Begriff „Freiheitsgrad“ nicht unmodifiziert aus der kontinuierlichen Welt übernommen werden kann. Nourgaliev et al. gehen davon aus, dass $\Delta t/\tau \geq 0,51$ sein sollte, um die Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten, und weisen nach, dass dann mit der Forderung $c \approx 300$ m/s die maximale Gitterweite etwa $1 \mu\text{m}$ nicht überschreiten darf. Dies würde zu einem unververtretbaren Aufwand für die Simulation führen. In der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass die Lattice-Boltzmann-Verfahren sich durch weitere Maßnahmen wie Turbulenzmodelle, räumliche Tiefpassfilter, Multiple-Relaxation-Time-Verfahren usw. durchaus soweit stabilisieren lassen, dass Simulationen strömungsakustischer Probleme mit praktisch nutzbaren Gitterweiten möglich werden. Ein Verzicht auf Turbulenzmodelle und andere numerisch stabilisierende Methoden würde bei jedem numerischen Strömungssimulationsverfahren im Bereich der Strömungsakustik zu einem unververtretbaren Aufwand führen.

Eine Simulation mit Lattice-Boltzmann-Verfahren zielt nicht auf einen Erkenntnisgewinn über die Mikrodynamik des betrachteten Systems ab, sondern auf die Makrodynamik, also das Verhalten thermodynamischer Größen wie Druck, Dichte, mittlere Geschwindigkeit usw.. Es konnte gezeigt werden, dass die Schallgeschwindigkeit in Lattice-Boltzmann-Modellen alle Forderungen hinsichtlich der Abbildung makroskopischer physikalischer Prozesse mit der zu erwartenden Genauigkeit erfüllt. Insofern liegt kein Grund vor, in Lattice-Boltzmann-Modellen eine „Pseudoschallgeschwindigkeit“ von einer „Schallgeschwindigkeit“ zu unterscheiden. Die Schallgeschwindigkeit wird bei den Lattice-Boltzmann-Verfahren in ähnlicher Weise als Parameter eingeführt, wie dies bei Verfahren, die die Navier-Stokes-Gleichungen direkt lösen, auch der Fall ist, d.h. wird nicht wie bei der kinetischen Gastheorie aus den Grundeigenschaften des Systems abgeleitet. Da die Zielrichtung von Lattice-Boltzmann-Verfahren und traditionellen Navier-Stokes-Simulatoren jedoch die gleiche ist, erscheint die Wahl der Bezeichnung „Schallgeschwindigkeit“ durchaus sinnvoll und korrekt.

5.2 Anwendung des Lattice-Boltzmann-Verfahren in strömungsakustischen Simulationen

Für die Lösung strömungsakustischer Probleme ist nicht nur das Vorhandensein und die relative Fehlerarmut von entsprechenden Moden in den linearisierten Modellen erforderlich, sondern auch die Kopplung der jeweiligen Moden von Bedeutung, um z.B. die Erzeugung von Schallwellen durch instationäre Strömungen simulieren zu können. Theoretisch wird durch die Ableitung der Navier-Stokes-Gleichungen aus den Lattice-Boltzmann-Gleichungen nachgewie-

sen, dass die Lattice-Boltzmann-Verfahren Schall- und Strömungsfeld in geeigneter Weise koppeln. Im zweiten Teil der Arbeit stand daher die Frage im Mittelpunkt, in wie weit sich die Lattice-Boltzmann-Verfahren auch praktisch zur Berechnung von strömungsakustischen Problemen eignen. Zu diesem Zweck wurden numerische Experimente durchgeführt, deren Ergebnisse mit Modellvorhersagen bzw. Windkanalexperimenten verglichen werden können.

Im ersten Experiment wurde die Wechselwirkung einzelner Wirbel mit der Vorderkante einer dünnen, halbunendlichen Platte untersucht. Dieses Experiment hat den Vorteil, dass die Problemstellung analytisch gut erforscht ist, und damit theoretische Vorhersagen errechnet werden können. Es zeigt sich, dass die maximalen Amplituden der direkten Simulation des Schallfeldes gut mit den Vorhersagen des theoretischen Modells, d.h. der akustischen Analogie übereinstimmen. Aus diesem Ergebnis kann der Schluss gezogen werden, dass Lattice-Boltzmann-Verfahren durchaus zur Simulation strömungsakustischer Probleme tauglich sind. Den hier vorgestellten Ergebnissen (siehe Abb. 4.9 und 4.10) ist jedoch zu entnehmen, dass die Energie der Schallwellen in der direkten Simulation größer ist, als durch die akustische Analogie vorhergesagt wird. Die Ursache hierfür könnte darin liegen, dass die Wirbel nur mit relativ wenigen Gitterpunkten aufgelöst sind ($r_0 = 4\Delta x$).

Während der Arbeiten tauchten eine Reihe von Problemen auf, die hier nur kurz genannt werden sollen: Zunächst war geplant, die Wechselwirkung eines Wirbels mit Hinterkante einer dünnen Platte zu simulieren. Es stellte sich heraus, dass dies im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war. In diesem Zusammenhang seien einige Probleme genannt, die bei der Untersuchung des „Hinterkantenschalls“ auftreten:

- Die Annahme einer unendlich dünnen, reibungsfreien Wand (Platte) ist nicht sinnvoll. Abgesehen davon, dass die Modellvorstellung im Experiment nicht realisierbar ist, ergeben sich auch im numerischen Modell Probleme, weil dadurch in der Scherschicht hinter der Platte unendlich große Gradienten auftreten, die zu numerischen Fehlern führen. Durch die extremen Gradienten sind in diesem Fall möglicherweise auch viskose Terme in der akustischen Analogie von Bedeutung, die i.A. vernachlässigt werden.
- Die Annahme einer reibungsbehafteten, endlich dicken Platte (noslip-Randbedingung an der Platte) führt zur Ausbildung einer Grenzschicht über der Platte und eines instabilen Nachlaufes der Platte. In den entsprechenden Simulationen zeigte sich, dass offenbar die Wechselwirkung des Wirbels mit dem instabilen Nachlauf in Anwesenheit der Hinterkante zu einer sehr viel stärkeren Schallerzeugung führt, als der reine Übertritt des Wirbels über die Kante.
- Die Annahme einer reibungsbehafteten Platte mit Dicke Null (noslip-Randbedingung an der Platte) führt zur Ausbildung einer Grenzschicht über der Platte und eines stabilen Nachlaufes der Platte. Bei diesem Experiment wird nur sehr wenig Schall erzeugt, der durch die im Modell auftretenden Fehler (fehlerhafte Randbedingungen, „Nachhall“ des Anfangs-Knalls) bei weitem übertroffen wird.

Die hier geschilderten Probleme treten nicht nur bei Simulation mit Lattice-Boltzmann-Verfahren auf, sondern sind von allgemeiner Natur. Tatsächlich ist dem Autor trotz einiger Recherchen keine Arbeit bekannt, in der der durch den Übertritt eines Wirbels über die Hinterkante einer Platte erzeugte Schall mit Hilfe eines auf einer Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichung beruhenden Verfahren direkt numerisch korrekt simuliert wurde.

Die Simulation der Schallentstehung bei der Überströmung eines Hohlraumes ist ein weiteres Beispiel für den erfolgreichen Einsatz des Lattice-Boltzmann-Verfahrens, wie die

Übereinstimmung der hier erzielten Ergebnisse mit Windkanalmessungen insbesondere bei Frequenz und Amplitude der Druckschwankungen im Hohlraum zeigt. Das hier betrachtete Experiment wurde unter leicht geänderten Bedingungen in anderen Windkanälen wiederholt, wobei jeweils teilweise deutliche Unterschiede in den Ergebnissen zu Tage traten. Offenbar ist der physikalische Mechanismus der Schallerzeugung recht empfindlich von den Details des Experimentes, insbesondere vom Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht abhängig.

Bei der Simulation des umströmten Halbzylinders mit PowerFLOW treten zwei Probleme auf. Zum einen handelt es sich, wie auch Windkanal bestätigt wurde, um eine voll turbulente dreidimensionale Strömung, deren tonale bzw. periodische Anteile nur relativ schwach ausgeprägt sind. Es ist daher ein 3D-Modell mit sehr hoher Auflösung erforderlich, was mit der für diese Arbeit zur Verfügung stehenden Rechnerausstattung (6 AMD Athlon Prozessoren mit jeweils 2 GHz Taktfrequenz) kaum zu bewältigen war. In Anbetracht dieser Tatsache ist es ein guter Erfolg, dass die Spektren der Wanddruckschwankungen bis zu einer Frequenz von etwa 400 Hz gut mit den Windkanalmessungen übereinstimmen. Das zweite Problem besteht darin, dass in PowerFLOW Version 3 durch die Quantisierung der Dichte mit 16-bit-Integer-Zahlen ein breitbandiges Quantisierungsrauschen von ca 70 dB eingeführt wird, was im vorliegenden Fall die Auswertungen der direkt simulierten Signale unmöglich machte. Mit der Einführung der Version 4 von PowerFLOW wird die Dichte mit 32-bit Fließkommazahlen dargestellt werden, was zu einem erheblichen Absinken des Rauschpegels führen wird.

Ein wesentliches Problem bei der Simulation von strömungsakustischen Problemen ist die Wahl der Randbedingungen, insbesondere an solchen Grenzen des Rechengebietes, wo Reflexionsfreiheit gefordert wird. In dieser Arbeit wurde nicht gezielt nach geeigneten Randbedingungen gesucht. Die in dieser Arbeit bei den zweidimensionalen Rechnungen benutzten Randbedingungen reflektieren einen Teil der einlaufenden Schallwellen zurück in das Rechengebiet, wobei der Reflexionsfaktor kleiner als 10 % ist. Für den ersten Testfall, Wechselwirkung mit der Vorderkante einer Platte, wurden die übrigen Parameter der Simulation so gewählt, dass die Wahl der Randbedingungen unkritisch sein sollte, da die Simulation abgebrochen werden konnte, bevor die Schallwellen den Rand des Rechengebietes erreichten. Daher konnte eine störende Reflexion nicht auftreten. Im Falle des überströmten Hohlraumes ist es jedoch durchaus möglich, dass Reflexionen vom Rand des Rechengebietes das Ergebnis verfälschen, zumal die Reflexionen die gleiche Frequenz wie die abgestrahlten Schallwellen haben. Bei den mit PowerFLOW durchgeführten, dreidimensionalen Simulationen wurden am Ein- bzw. Ausströmrand die Geschwindigkeit bzw. der Druck, und an den übrigen Rändern des Rechengebietes eine reibungsfreie Wand vorgegeben. Diese Randbedingungen sind alle nicht für akustische Simulationen geeignet. Im Falle des Halbzylinders ist eine Verfälschung der Ergebnisse unwahrscheinlich, weil der abgestrahlte Schall sehr kleine Amplituden hatte und daher durch das Quantisierungsrauschen überdeckt wurde. Im Falle des überströmten Hohlraumes ist wiederum eine Verfälschung der Ergebnisse nicht mit Sicherheit auszuschließen.

5.3 Ausblick

Das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit ist, dass Lattice-Boltzmann-Verfahren für die Untersuchung strömungsakustischer Probleme gut geeignet sind. Jedoch wären für die Anwendung in der Praxis noch einige wesentliche Fragen zu klären:

- Definition von geeigneten Randbedingungen

Die Randbedingungen können im Grunde in ähnlicher Weise definiert werden, wie es bei

den einschlägigen Finite-Differenzen-Verfahren gemacht wird. Da es sich bei den Lattice-Boltzmann-Verfahren um Verfahren zweiter Ordnung handelt, dürfte sich der notwendige numerische Aufwand in Grenzen handeln.

- Untersuchung der Vorgänge an Gitterübergängen
Beim Übergang von feineren in gröbere Gitter dürften bei kleinen Wellenlängen Absorptions- und Reflexionseffekte auftreten. Während Absorption akzeptabel wäre, hätten Reflexionen negative Auswirkungen auf das Rechenergebnis.

Das Lattice-Boltzmann-Verfahren wird in der Automobilindustrie bereits probeweise zur Untersuchung strömungsakustischer Fragestellungen eingesetzt, wobei zum Teil sehr gute Erfolge erzielt werden. Darüber hinaus kommen jedoch auch andere Anwendungen in Frage:

- Simulation der Schallausbreitung in Kanälen:
Bei Ultraschallgasdurchflussmessern wird der Konvektionseffekt bei der Schallwellenausbreitung zur Schätzung des Volumenstromes durch den Rohrquerschnitt genutzt. Es gibt jedoch eine Reihe von Effekten, die das Ergebnis verfälschen können, z.B. Störungen des Geschwindigkeitsprofils, Verwirbelungen durch unregelmäßige Wandgestaltung, Einströmende turbulente Strukturen usw.. Hier können Simulationen helfen, um die Effekte zu verstehen und geeigneten Gegenmaßnahmen zu finden und zu testen. Das Lattice-Boltzmann-Verfahren wurde durch den Autor dieser Arbeit bereits versuchsweise auf zweidimensionale Testbeispiele erfolgreich angewandt.
- Schallerzeugung in Strömungskanälen:
In Lüftungskanälen wird oft in Folge der turbulenten Durchströmung auch Schall erzeugt. In vielen Fällen (z.B. bei PKW) kann aber aufgrund des verfügbaren Bauraums der Querschnitt nicht einfach erweitert werden, um eine geringere Strömungsgeschwindigkeit zu erzielen. Hier bietet sich das Lattice-Boltzmann-Verfahren wegen der guten akustischen Eigenschaften an, durch Simulation zu optimierten Bauformen zu kommen.
- Schallabsorption in porösen Medien:
Das Lattice-Boltzmann-Verfahren wird vielfach erfolgreich zur Berechnung von Strömungsproblemen in porösen Medien genutzt. Es liegt daher nahe, mit Hilfe der Lattice-Boltzmann-Verfahren die Absorption von Schall in porösen Medien zu untersuchen.
- Resonanzabsorber in Strömungskanälen:
Die von Ronneberger untersuchten Probleme der Schallerzeugung, Phasensynchronisation usw. in Strömungskanälen mit Absorbern lassen sich mit Lattice-Boltzmann-Verfahren sehr einfach simulieren.

Außer den genannten Anwendungen lassen sich sicher noch viele weitere Einsatzmöglichkeiten für Lattice-Boltzmann-Verfahren finden. Die hier genannten Probleme haben insbesondere den Vorteil, dass die o.g. Probleme mit Randbedingungen hier eine untergeordnete Rolle spielen dürften, weil die Probleme von vorneherein akustisch reflektierende Wände beinhalten.

Literaturverzeichnis

- [1] ACHILLES, S.: *Aeroakustische Untersuchungen an umströmten Fahrzeugmodellstrukturen*. Diplomarbeit, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, Technische Universität Dresden, 2004.
- [2] ACHILLES, S., A. ZEIBIG und A. WILDE: *Aeroakustische Validierungen am Beispiel einer generischen Fahrzeugstruktur*. In: *Fortschritte der Akustik*. DAGA 2005, München, 15.–17. Mar., 2005.
- [3] ASHCROFT, G.B., K. TAKEDA und X. ZHANG: *Computations of the self-induced oscillatory flow in an automobile door cavity*. In: *Proceedings of the Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Cleveland, Ohio November 8–10*, Seiten 371–383, 1999.
- [4] ASHCROFT, G.B., K. TAKEDA und X. ZHANG: *A numerical investigation of the noise radiated by a turbulent flow over a cavity*. *Journal of Sound and Vibration*, 265:43–60, 2003.
- [5] BECKER, R.: *Theorie der Wärme*. Springer-Verlag, 1985.
- [6] BHATNAGAR, P. L., E. P. GROSS und M. KROOK: *A model for collision processes in gases*. *Physical Review*, 94:511–525, 1954.
- [7] BOGEY, C. und C. BAILLY: *A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*. *Journal of Computational Physics*, 194:194–214, 2004.
- [8] BOGOLIUBOV, N.N.: *Problems of a dynamical theory in statistical mechanics*. In: BOER, J. DE und G.E. UHLENBECK (Herausgeber): *Studies in statistical mechanics*, Band 1, Seiten 5–118. North Holland, Amsterdam, 1962.
- [9] BOLTON, J.S.: *The excitation of an acoustic resonator by pipe flow*. Dissertation, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, England, 1976.
- [10] BRENTNER, K.: *Modelling Aerodynamically Generated Sound*. In: *38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, 10 – 13 January*, 2000.
- [11] BUICK, J.M.: *Lattice Boltzmann Methods in Interfacial Wave Modelling*. Dissertation, University of Edinburgh, 1997.
- [12] CARADONNA, F., C. KITAPLIOGLU, M. MCCLUER, J. BAEDER, G. LEISHMAN, C. BE-REZIN, J. VISINTAINER, J. BRIDGEMAN, C. BURLEY, R. EPSTEIN, A. LYRINTZIS, E. KOUTSAVDIS, G. RAHIER, Y. DELRIEUX, J. RULE und D. BLISS: *A Review of Methods*

- for the Prediction of BVI Noise. *Journal of the American Helicopter Society*, 45(4):303–320, Oct. 2000.
- [13] CHEN, H., C. TEIXEIRA und K. MOLVIG: *Digital Physics Approach to Computational Fluid Dynamics: Some Basic Theoretical Features*. *International Journal of Modern Physics C*, 8(4), 1997.
 - [14] CHEN, H., C. TEIXEIRA und K. MOLVIG: *Realization of fluid boundary conditions via discrete Boltzmann dynamics*. *International Journal of Modern Physics C*, 9(8), 1998.
 - [15] CHEN, S. und G.D. DOOLEN: *Lattice Boltzmann method for fluid flows*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30:300–364, 1998.
 - [16] CREMER, L. und H. MÜLLER: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*. Hirzel-Verlag Stuttgart, 1978.
 - [17] CRIGHTON, D. G., A. P. DOWLING, J. E. FLOWCS WILLIAMS, M. HECKL und F. G. LEPPINGTON: *Modern methods in analytical acoustics*. Springer-Verlag, 1992.
 - [18] DELLAR, P.J.: *Bulk and shear viscosities in lattice Boltzmann equations*. *Physical Review E*, 64(3):031203, 2001.
 - [19] D’HUMIÈRES, D.: *Generalized lattice-Boltzmann Equations*. In: B.D. SHIZGAL, D. P. WEAVER (Herausgeber): *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulation, Progress in Astronautics and aeronautics*, Band 159, Seiten 450–458. AIAA, Washington D.C., 1992.
 - [20] D’HUMIÈRES, D., I. GINZBURG, M. KRAFCZYK, P. LALLEMAND und L.-S. LUO: *Multiple-relaxation-time Lattice Boltzmann models in 3D*. Technischer Bericht 2002-20, ICASE, 2002.
 - [21] FILIPPOVA, O. und D. HÄNEL: *Grid Refinement for Lattice-BGK Models*. *Journal of Computational Physics*, 147(1), 1998.
 - [22] FRISCH, U., B. HASSLACHER und Y. POMEAU: *Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation*. *Physical Review Letters*, 56(14):1505–1508, 1986.
 - [23] HAYDOCK, D. und J.M. YEOMANS: *Lattice Boltzmann simulations of acoustic streaming*. *Journal of Physics A: Mathematics and General*, 34:5201–5213, 2001.
 - [24] HE, X. und L.-S. LUO: *Apriori derivation of the lattice Boltzmann equation*. *Physical Review E*, 55(6):6333–6336, 1997.
 - [25] HE, X. und L.-S. LUO: *Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation*. *Physical Review E*, 56(6):6811–6817, 1997.
 - [26] HE, X., Q. ZOU, L.-S. LUO und M. DEMBO: *Analytic Solutions of Simple Flows and Analysis of Nonslip Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model*. *Journal of Statistical Physics*, 87:115–136, 1997.
 - [27] HENDERSON, B.: *Automobile Noise Involving Feedback Sound Generation by Low Speed Cavity flows*. In: *Proceedings of the Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Cleveland, Ohio November 8–10*, Seiten 95–100, 1999.

- [28] HOU, S., Q. ZOU, S. CHEN G.D. DOOLEN und A.C. COGLEY: *Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method*. Journal of Computational Physics, 118(2):329–347, 1994.
- [29] HOWE, M.S.: *A Review of the Theory of Trailing Edge Noise*. Journal of Sound and Vibration, 61(3):437–465, 1978.
- [30] HOWE, M.S.: *Theory of vortex sound*. Cambridge University press, 2003.
- [31] KÖLTZSCH, P.: *Strömungsmechanisch erzeugter Lärm*. Dissertation B (Habilitationsschrift), TU Dresden, 1974.
- [32] KRAFCZYK, MANFRED: *Gitter-Boltzmann-Methoden: Von der Theorie zur Anwendung*. Habilitationsschrift TU München, 2001.
- [33] KÜHNELT, H.: *Simulation dreidimensionaler Schallfelder in Flöteninstrumenten mittels Lattice-Boltzmann-Methode*. Diplomarbeit, Universität für Musik und darstellende Kunst Wien, 2002.
- [34] KURBATSKII, K.K. und C.K.W. TAM: *Direct numerical simulation of automobile cavity tones*. In: *Proceedings of the Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Cleveland, Ohio November 8–10*, Seiten 355–361, 1999.
- [35] LALLEMAND, P. und L.-S. LUO: *Theory of the Lattice Boltzmann Method: Dispersion, Dissipation, Isotropy, Galilean Invariance, and Stability*. Physical Review E, 61(6):6546–6562, 2000.
- [36] LALLEMAND, P. und L.-S. LUO: *Theory of the Lattice Boltzmann Method: Acoustic and thermal properties in two and three dimensions*. Physical Review E, 68(3):036706, 2003.
- [37] LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik*. Akademie Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1991.
- [38] Lighthill, J.: *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [39] Lighthill, M. J.: *On sound generated aerodynamically, Part I: General theory*. In: *Proc. Roy. Soc., London*, Band A 211, Seiten 564–587, 1952.
- [40] LUMMER, M., J. DELFS und TH. LAUKE: *Simulation of sound generation by vortices passing the trailing edge of airfoils*. In: *8th CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado*, AIAA paper 2002-2578, 2002.
- [41] MALLICK, S., R. SHOCK und V. YAKHOT: *Numerical simulation of the excitation of a Helmholtz resonator by a grazing flow*. Journal of the Acoustical Society of America, 114(4):1833–1840, 2003.
- [42] MEI, R., L.-S. LUO und W. SHYY: *An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method*. Journal of Computational Physics, 155:307–330, 1999.
- [43] MEI, R., W. SHYY, D. YU und L.-S. LUO: *Lattice Boltzmann Method for 3-D Flows with Curved Boundary*. Journal of Computational Physics, 161:680–699, 2000.

- [44] MOON, Y.J., S.R. KOH, Y. CHO und J.M. CHUNG: *Aeroacoustic computations of the unsteady flows over a rectangular cavity with a lip*. In: *Proceedings of the Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Cleveland, Ohio November 8–10*, Seiten 347–353, 1999.
- [45] NELSON, P.A., N.A. HALLIWAY und P.E. DOAK: *Fluid dynamics of flow excited resonance. I. Experiment*. Journal of Sound and Vibration, 78:15–27, 1981.
- [46] NELSON, P.A., N.A. HALLIWAY und P.E. DOAK: *Fluid dynamics of flow excited resonance. II. Flow excited resonance*. Journal of Sound and Vibration, 91:375–389, 1983.
- [47] NOURGALIEV, R.R., T.N. DINH, T.G. THEOFANOUS und D. JOSEPH: *The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications*. Int. Journal of Multiphase Flow, 29:117–169, 2003.
- [48] RICOT, D., V. MAILLARD und C. BAILLY: *Numerical simulation of the unsteady flow past a cavity and application to sun-roof buffeting*. AIAA Journal, 2001.
- [49] ROSHKO, A.: *On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets*. Technischer Bericht, NACA Rep. 1191, 1954.
- [50] ROTHMAN, D. H. und S. ZALESKI: *Lattice-Gas Cellular Automata: Simple Models of Complex Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1997.
- [51] SABANCA, M. und J. DELFS: *Numerical Investigation of Self-Excited Oscillations of a Generic Profile*. In: *Fortschritte der Akustik. DAGA 2005*, München, 15.–17. Mar., 2005.
- [52] SKORDOS, P.A.: *Modeling flue organ pipes: subsonic flow, Lattice Boltzmann, and parallel distributed computers*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory, 1995.
- [53] SUCCI, S.: *The Lattice Boltzmann Equation - For Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001.
- [54] TAM, C.K.W.: *Computational Aeroacoustics: Issues and Methods*. AIAA Journal, 33(10):1788–1796, 1995.
- [55] TAM, C.K.W. und J.C. WEBB: *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. Journal of Computational Physics, 107:262–281, 1993.
- [56] TEXEIRA, C.M: *Incorporating Turbulence Models into the Lattice-Boltzmann Method*. International Journal of Modern Physics C, 9:1159, 1998.
- [57] TÖLKE, J.: *Gitter-Boltzmann-Verfahren zur Simulation von Zweiphasenströmungen*. Dissertation, Technische Universität München, 2001.
- [58] WANG, S., F.L. TEIXEIRA, R. LEE und J.F. LEE: *Dispersion-Relation-Preserving FDTD Algorithms for Large Scale Three-Dimensional Problems*. WWW-document, 2002.
- [59] WILDE, A.: *Calculation of sound generation and radiation from instationary flows*. zur Veröffentlichung angenommen in Computers&Fluids, Sonderausgabe zur ICMMES 2004, 2005.

- [60] WILDE, A.: *Strömungsakustische Simulationen mit dem Lattice-Boltzmannverfahren*. In: *Fortschritte der Akustik*. DAGA 2005, München, 15.–17. Mar., 2005.
- [61] WOLF-GLADROW, D.: *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice-Boltzmann Models*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [62] ZEIBIG, A., S. ACHILLES, A. WILDE, M. SABANCA und J. DELFS: *Aeroacoustic measurements and validations of numerical simulations for the case of a generic vehicle structure*. In: *Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisbon, 11-14 July, 2005*.
- [63] ZOU, Q. und X. HE: *On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model*. *Physics of Fluids*, 9(6):1591–1598, 1997.